Výroková a predikátová logika - I

Petr Gregor

KTIML MFF UK

ZS 2016/2017

Plán přednášky 1/2

- Úvod
  1. Trocha historie, “paradoxy”, logika jako jazyk matematiky, rozdíl a vztah syntaxe a sémantiky, předběžnosti.
- Výroková logika
  2. Základní syntax a sémantika, univerzálnost logických spojek, normální tvary, 2-SAT a Horn-SAT.
  3. Sémantika vzhledem k teorii, vlastnosti teorií, algebra výroků, analýza teorií nad konečně mnoha prvovýroky. Tablo metoda pro VL.
  4. Tablo metoda pro VL: systematické tablo, korektnost, úplnost, kompaktnost.
  5. Rezoluční metoda, korektnost a úplnost, lineární rezoluce, rezoluce v Prologu. Hilbertovský kalkul.

Plán přednášky 2/2

- Predikátová logika
  6. Základní syntax a sémantika, instance a varianty. Struktury a modely teorií.
  7. Vlastnosti teorií. Podstruktury, otevřené teorie. Expanze a redukt. Booleovy algebry. Tablo metoda pro PL.
  8. Tablo metoda pro PL: systematické tablo, korektnost, úplnost, kompaktnost. Rovnost v PL.
  9. Extenze o definice. Prenexní tvar, skolemizace, Herbrandova věta.
  10. Rezoluční metoda v PL: korektnost a úplnost. Lineární rezoluce a LI-rezoluce. Hilbertovský kalkul.
- Teorie modelů, rozhodnutelnost, neúplnost
  11. Elementární ekvivalence, kompletnost. Isomorfismus struktur. Konečná a otevřená axiomatizovatelnost. Základní teorie.
  12. Rozhodnutelné teorie, rekurzivní axiomatizovatelnost. Nerozhodnutelnost PL. Věty o neúplnosti - úvod.
  13. Aritmetizace syntaxe, princip self-reference, věta o pevném bodě, nedefinovatelnost pravdy. Věty o neúplnosti, důsledky. Závěr.

Koncepce přednášky

- logika pro informatiky
  - \+ rezoluce v predikátové logice, unifikace, “pozadí” Prologu
  - \- méně teorie modelů, ...
- tablo metoda namísto Hilbertovského kalkulu
  - \+ algoritmicky intuitivnější, mnohdy elegantnější důkazy
  - \- nedostupnost literatury (zejména v čj), omezení na spočetné jazyky
- nejprve samostatně výroková logika
  - \+ ideální “hřiště” pro pochopení základních konceptů
  - \- zpočátku volnější tempo výkladu
- nerozhodnutelnost a neúplnost méně formálně
  - \+ důraz na principy
  - \- nebezpečí nepřesnosti

Doporučená literatura

- Knihy
  - A. Nerode, R. A. Shore, *Logic for Applications*, Springer, 2^{nd} edition, 1997.
  - P. Pudlák, *Logical Foundations of Mathematics and Computational Complexity - A Gentle Introduction*, Springer, 2013.
  - V. Švejdar, *Logika, neúplnost, složitost a nutnost*, Academia, Praha, 2002.
  - A. Sochor, *Klasická matematická logika*, UK v Praze - Karolinum, 2001.
  - W. Hodges, *Shorter Model Theory*, Cambridge University Press, 1997.
- Elektronické zdroje
  - J. Mlček, *Výroková a predikátová logika*, skripta k přednášce, 2012. [www]
  - P. Štěpánek, *Meze formální metody*, skripta k přednášce, 2000. [pdf]
  - slidy k přednášce

Trocha historie

- Aristotelés (384-322 př.n.l.) - sylogismy, např.

  z *'žádný Q není R'* a *'každý P je Q'* odvoď *'žádný P není R'*.

- Eukleidés: *Základy* (asi 330 př.n.l.) - axiomatický přístup ke geometrii

  "Pro každou přímku p a bod x, který neleží na p, existuje přímka skrze x neprotínající p." (5. postulát)

- Descartes: *Geometrie* (1637) - algebraizace geometrie
- Leibniz - sen o *"lingua characteristica"* a *"calculus ratiocinator"* (1679-90)
- De Morgan - zavedení logických spojek (1847)

$$\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$
$$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

- Boole - výrok jako binární funkce, algebraizace logiky (1847)
- Schröder - sémantika predikátové logiky, koncept modelu (1890-1905)

Trocha historie - teorie množin

- Cantor - *intuitivní* teorie množin (1878), např. princip zahrnutí

  "Pro každou vlastnost $\varphi(x)$ *existuje množina* $\{x \mid \varphi(x)\}$*."*

- Frege - logika s kvantifikátory a predikáty, pojem důkazu jako odvození, axiomatická teorie množin (1879, 1884)
- Russel - Fregeho teorie množin je sporná (1903)

  Pro $a = \{x \mid \neg(x \in x)\}$ *je* $a \in a$ *?*

- Russel, Whitehead - teorie typů (1910-13)
- Zermelo (1908), Fraenkel (1922) - *standardní* teorie množin ZFC, např.

  "Pro každou vlastnost $\varphi(x)$ *a množinu* y *existuje množina* $\{x \in y \mid \varphi(x)\}$*."*

- Bernays (1937), Gödel (1940) - teorie množin založená na třídách, např.

  "Pro každou množinovou vlastnost $\varphi(x)$ *existuje třída* $\{x \mid \varphi(x)\}$*."*

Trocha historie - algoritmizace

- Hilbert - kompletní axiomatizace Euklidovské geometrie (1899),
  formalismus - striktní odproštění se od významu, mechaničnost

  "... musí být možné místo o bodu, přímce a rovině mluvit o stolu, židli a půllitru." (Grundlagen der Geometrie)

- Brouwer - intuicionismus, důraz na konstruktivní důkazy

  "Matematické tvrzení je myšlenková konstrukce ověřitelná intuicí."

- Post - úplnost výrokové logiky (1921)
- Gödel - úplnost predikátové logiky (1930), věty o neúplnosti (1931)
- Kleene, Post, Church, Turing - formalizace pojmu algoritmus,
  existence algoritmicky nerozhodnutelných problémů (1936)
- Robinson - rezoluční metoda (1965)
- Kowalski; Colmerauer, Roussel - Prolog (1972)

Jazyk matematiky

Logika formalizuje pojem důkazu a pravdivosti matematických tvrzení.

Lze ji postupně rozčlenit dle prostředků jazyka.

- logické spojky — *výroková logika*

  Umožňují vytvářet složená tvrzení ze základních.
- proměnné pro individua, funkční a relační symboly, kvantifikátory — *1. řádu*

  Tvrzení o individuích, jejich vlastnostech a vztazích. Teorii množin, která je *"světem"* (téměř) celé matematiky, lze popsat jazykem 1. řádu.

V jazyce vyšších řádů máme navíc

- proměnné pro množiny individuí (i relace a funkce) — *logika 2. řádu*
- proměnné pro množiny množin individuí, *atd.* — *logika 3. řádu*
- ...

Příklady tvrzení v jazycích různých řádů

- *"Nebude-li pršet, nezmoknem. A když bude pršet, zmokneme, na sluníčku zase uschneme."* *výrok*

$$(\neg p \to \neg z) \wedge (p \to (z \wedge u))$$

- *"Existuje nejmenší prvek."* *1. řádu*

$$\exists x \, \forall y \, (x \leq y)$$

- Axiom indukce. *2. řádu*

$$\forall X \, ((X(0) \wedge \forall x (X(x) \to X(x+1))) \to \forall x \, X(x))$$

- *"Libovolné sjednocení otevřených množin je otevřená množina."* *3. řádu*

$$\forall \mathcal{X} \forall Y ((\forall X (\mathcal{X}(X) \to \mathcal{O}(X)) \wedge \forall x (Y(x) \leftrightarrow \exists X (\mathcal{X}(X) \wedge X(x)))) \to \mathcal{O}(Y))$$

Syntax a sémantika

Budeme studovat vztahy mezi syntaxí a sémantikou:

- *syntax*: symboly, pravidla vytváření termů a formulí, odvozovací pravidla, dokazovací systém, důkaz, dokazatelnost,
- *sémantika*: přiřazení významu, struktury, modely, splnitelnost, pravdivost.

V logice zavedeme pojem důkazu jako přesný syntaktický koncept.

Formální dokazovací systém je

- *korektní*, pokud každé dokazatelné tvrzení je pravdivé,
- *úplný*, pokud každé pravdivé tvrzení je dokazatelné.

Uvidíme, že predikátová logika (1. řádu) má dokazovací systémy, které jsou korektní a zároveň úplné. Pro logiky vyšších řádů to neplatí.

Paradoxy

"Paradoxy" jsou inspirací k přesnému zadefinování základů logiky.

- *paradox kréťana*

  Kréťan řekl: "Všichni kréťané jsou lháři."

- *paradox holiče*

  V městě žije holič, jenž holí všechny, kteří se neholí sami.

  Holí sám sebe?

- *paradox lháře*

  Tato věta je lživá.

- *Berryho paradox*

  Výraz "nejmenší přirozené číslo, které nelze definovat méně než jedenácti slovy." ho definuje pomocí deseti slov.

Množinové pojmy

Veškeré pojmy zavádíme v rámci teorie množin pouze pomocí predikátu náležení a rovnosti (a prostředků logiky).

- Množinová vlastnost $\varphi(x)$ definuje *třídu* $\{x \mid \varphi(x)\}$. Třída, která není množinou, se nazývá *vlastní*, např. $\{x \mid x = x\}$.
- $x \notin y$, $x \neq y$ jsou zkratkou za $\neg(x \in y)$, $\neg(x = y)$.
- $\{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$ označuje množinu obsahující právě $x_0, \ldots, x_{n-1}$, $\{x\}$ se nazývá *singleton*, $\{x, y\}$ *neuspořádaná dvojice*.
- $\emptyset$, $\cup$, $\cap$, $\setminus$, $\triangle$ značí *prázdnou množinu*, *sjednocení*, *průnik*, *rozdíl*, *symetrický rozdíl* množin, např.
$$x \triangle y = (x \setminus y) \cup (y \setminus x) = \{z \mid (z \in x \wedge z \notin y) \vee (z \notin x \wedge z \in y)\}$$
- x, y jsou *disjunktní* pokud $x \cap y = \emptyset$. $x \subseteq y$ značí, že x je *podmnožinou* y.
- *Potenční množina* (*potence*) x je $\mathcal{P}(x) = \{y \mid y \subseteq x\}$.
- *Sjednocení* (*suma*) x je $\bigcup x = \{z \mid \exists y(z \in y \wedge y \in x)\}$.
- *Pokrytí* množiny x je množina $y \subseteq \mathcal{P}(x) \setminus \{\emptyset\}$ s $\bigcup y = x$. Jsou-li navíc každé dvě (různé) množiny v y disjunktní, je y *rozklad* x.

Relace

- *uspořádaná dvojice* je $(x, y) = \{x, \{x, y\}\}$, tedy $(x, x) = \{x, \{x\}\}$,
  uspořádaná n-tice je $(x_0, \ldots, x_{n-1}) = ((x_0, \ldots, x_{n-2}), x_{n-1})$ pro $n > 2$,
- *kartézský součin* je $a \times b = \{(x, y) \mid x \in a, y \in b\}$,
  kartézská mocnina je $x^0 = \{\emptyset\}$, $x^1 = x$, $x^n = x^{n-1} \times x$ pro $n > 1$,
- *disjunktní sjednocení* je $x \uplus y = (\{\emptyset\} \times x) \cup (\{\{\emptyset\}\} \times y)$,
- *relace* je jakákoliv množina R uspořádaných dvojic,
  namísto $(x, y) \in R$ píšeme obvykle $R(x, y)$ nebo $x\, R\, y$,
  definiční obor (*doména*) R je $\mathrm{dom}(R) = \{x \mid \exists y\ (x, y) \in R\}$,
  obor hodnot R je $\mathrm{rng}(R) = \{y \mid \exists x\ (x, y) \in R\}$,
  extenze prvku x v R je $R[x] = \{y \mid (x, y) \in R\}$,
  inverzní relace k R je $R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$,
  restrikce R na množinu z je $R \restriction z = \{(x, y) \in R \mid x \in z\}$,
- *složení* relací R a S je relace $R \circ S = \{(x, z) \mid \exists y\ ((x, y) \in R \wedge (y, z) \in S)\}$,
- *identita* na množině z je relace $\mathrm{Id}_z = \{(x, x) \mid x \in z\}$.

Ekvivalence

- Relace R je *ekvivalence* na X, pokud pro všechna $x, y, z \in X$ platí

$$R(x,x) \qquad \text{(reflexivita)}$$
$$R(x,y) \to R(y,x) \qquad \text{(symetrie)}$$
$$R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z) \qquad \text{(tranzitivita)}$$

- $R[x]$ se nazývá *třída ekvivalence* (*faktor*) prvku x dle R, značíme i $[x]_R$.
- $X/R = \{R[x] \mid x \in X\}$ je *faktorizace* množiny X dle R.
- Platí, že X/R je rozklad X, neboť třídy jsou disjunktní a pokrývají X.
- Naopak, je-li S rozklad X, určuje ekvivalenci (na X)

$$\{(x,y) \mid x \in z, y \in z \text{ pro nějaké } z \in S\}.$$

Uspořádání

Nechť $\leq$ je relace na množině X. Řekneme, že $\leq$ je

- *částečné uspořádání* (množiny X), pokud pro všechna $x, y, z \in X$

$$x \leq x \qquad \text{(reflexivita)}$$
$$x \leq y \ \wedge \ y \leq x \ \rightarrow \ x = y \qquad \text{(antisymetrie)}$$
$$x \leq y \ \wedge \ y \leq z \ \rightarrow \ x \leq z \qquad \text{(tranzitivita)}$$

- *lineární* (*totální*) *uspořádání*, pokud navíc pro všechna $x, y \in X$

$$x \leq y \ \vee \ y \leq x \qquad \text{(dichotomie)}$$

- *dobré uspořádání*, pokud navíc každá neprázdná podmnožina X obsahuje *nejmenší* prvek.

Označme '$x < y$' za '$x \leq y \wedge x \neq y$'. Lineární uspořádání $\leq$ na X je

- *husté uspořádání*, pokud X není singleton a pro všechna $x, y \in X$

$$x < y \ \rightarrow \ \exists z \, (x < z \wedge z < y) \qquad \text{(hustota)}$$

Funkce

Relace f je funkce, pokud pro každé $x \in \mathrm{dom}(f)$ existuje jediné y s $(x, y) \in f$.

- Pak říkáme, že y je *hodnotou* funkce f v x, píšeme $f(x) = y$,
- $f\colon X \to Y$ značí, že f je funkce s $\mathrm{dom}(f) = X$ a $\mathrm{rng}(f) \subseteq Y$,
- funkce f je *na* (*surjektivní*) Y, pokud $\mathrm{rng}(f) = Y$,
- funkce f je *prostá* (*injektivní*), pokud pro všechna $x, y \in \mathrm{dom}(f)$

$$x \neq y \quad \to \quad f(x) \neq f(y)$$

- $f\colon X \to Y$ je *bijekce* X a Y, je-li prostá a na Y,
- je-li $f\colon X \to Y$ prostá, pak $f^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in f\}$ je *inverzní funkce*,
- *obraz* množiny A přes f je $f[A] = \{y \mid (x, y) \in f \text{ pro nějaké } x \in A\}$,
- je-li $f\colon X \to Y$ a $g\colon Y \to Z$, pak pro jejich složení platí $(f \circ g)\colon X \to Z$ a

$$(f \circ g)(x) = g(f(x))$$

- ${}^X Y$ značí množinu všech funkcí z X do Y.

Čísla

Uvedeme příklady explicitních konstrukcí.

- Přirozená čísla definujeme induktivně vztahem $n = \{0, \ldots, n-1\}$, tedy
$$0 = \emptyset, \quad 1 = \{0\} = \{\emptyset\}, \quad 2 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \quad \ldots$$
- množina *přirozených* čísel $\mathbb{N}$ je definována jako nejmenší množina obsahující $\emptyset$ uzavřená na $S(x) := x \cup \{x\}$ (následník).
- množina *celých* čísel je $\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim$, kde $\sim$ je ekvivalence definovaná
$$(a, b) \sim (c, d) \text{ právě když } a + d = b + c$$
- množina *racionálních* čísel je $\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}))/\approx$, kde $\approx$ je dána
$$(a, b) \approx (c, d) \text{ právě když } a.d = b.c$$
- množina *reálných* čísel $\mathbb{R}$ je množina *řezů* racionálních čísel, tj. netriviálních, dolů uzavřených podmnožin $\mathbb{Q}$ bez největšího prvku. ($A \subset \mathbb{Q}$ je *dolů uzavřená*, pokud $y < x \in A$ implikuje $y \in A$.)

Velikosti množin

- x má *stejnou nebo menší velikost* než y (x je *subvalentní* y), pokud existuje prostá funkce $f\colon x \to y$, $(x \preccurlyeq y)$
- x má *stejnou velikost* jako y, existuje-li bijekce $f\colon x \to y$, $(x \approx y)$
- x má *menší velikost* než y, pokud $x \preccurlyeq y$ a není $x \approx y$, $(x \prec y)$

Věta (Cantor) *$x \prec \mathcal{P}(x)$ pro každou množinu x.*

Důkaz $f(y) = \{y\}$ pro $y \in x$ je prostá funkce $f\colon x \to \mathcal{P}(x)$, tedy $x \preccurlyeq \mathcal{P}(x)$.
Pro spor předpokládejme, že existuje prostá $g\colon \mathcal{P}(x) \to x$. Definujme

$$y = \{g(z) \mid z \subseteq x \wedge g(z) \notin z\}$$

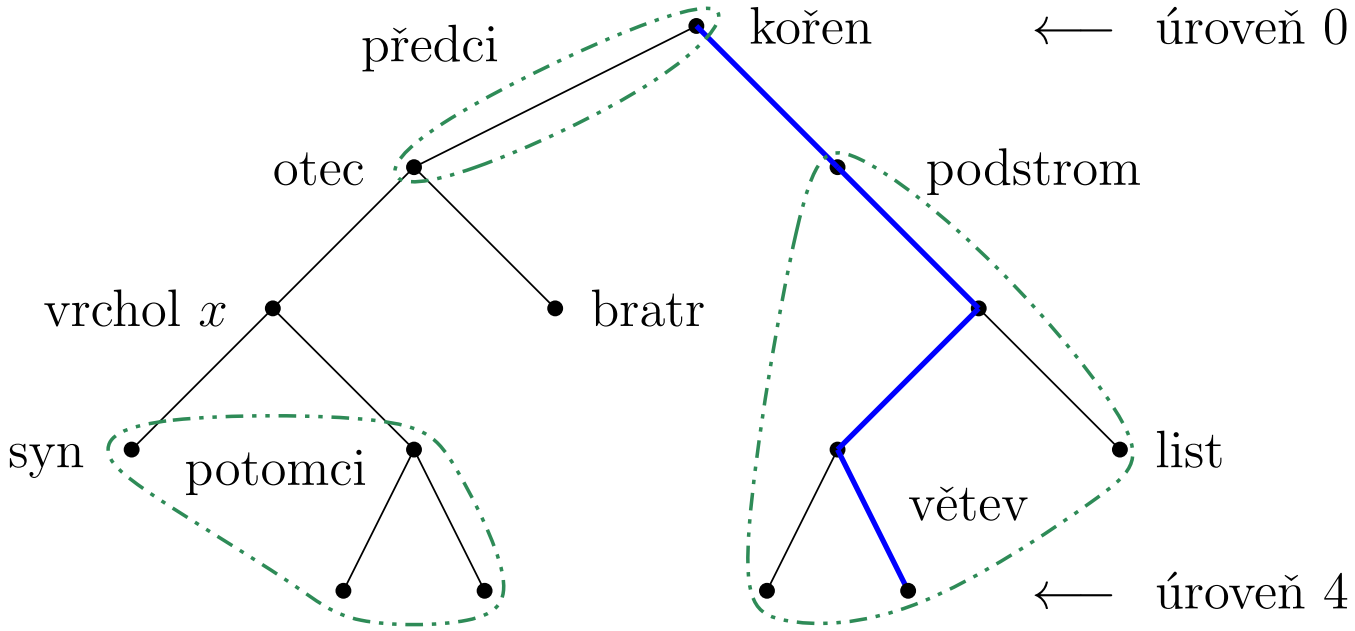
Dle definice, $g(y) \in y$ právě když $g(y) \notin y$, spor. □

- pro každé x existuje *kardinální číslo* κ s $x \approx \kappa$, značíme $|x| = \kappa$,
- x je *konečná*, pokud $|x| = n$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, jinak je *nekonečná*,
- x je *spočetná*, pokud je konečná nebo $|x| = |\mathbb{N}| = \omega$; jinak je *nespočetná*,
- x má *mohutnost kontinua*, pokud $|x| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = \mathfrak{c}$.

n-ární relace a funkce

- Relace *arity* (*četnosti*) $n \in \mathbb{N}$ na X je libovolná množina $R \subseteq X^n$, tedy pro $n = 0$ je $R = \emptyset = 0$ nebo $R = \{\emptyset\} = 1$, pro $n = 1$ je $R \subseteq X$,
- (Částečná) funkce *arity* (*četnosti*) $n \in \mathbb{N}$ z X do Y je libovolná funkce $f \subseteq X^n \times Y$. Řekneme, že f je *totální* na X^n, pokud $\mathrm{dom}(f) = X^n$, značíme $f \colon X^n \to Y$. Je-li navíc $Y = X$, je to *operace* na X.
- Funkce $f \colon A^n \to B$ je *konstantní*, pokud $\mathrm{rng}(f) = \{y\}$ pro nějaké $y \in Y$, pro $n = 0$ je $f = \{(\emptyset, y)\}$ a f ztotožňujeme s *konstantou* y.
- Aritu relace či funkce značíme $\mathrm{ar}(R)$ či $\mathrm{ar}(f)$ a mluvíme o *nulárních*, *unárních*, *binárních*, obecně *n-árních* relacích a funkcích (operacích).

Stromy



- *Strom* je množina T s částečným uspořádáním $<_T$, ve kterém existuje (jedinečný) nejmenší prvek, zvaný *kořen*, a množina předků libovolného prvku je dobře uspořádaná,
- *větev* stromu T je maximální lineárně uspořádaná podmnožina T,
- adoptujeme standardní terminologii o stromech z teorie grafů, pak např.

větev v konečném stromu je cesta z kořene do listu.

Königovo lemma

Budeme pracovat *(pro jednoduchost)* obvykle s konečně větvícími se stromy, ve kterých má každý vrchol kromě kořene bezprostředního předka (*otce*).

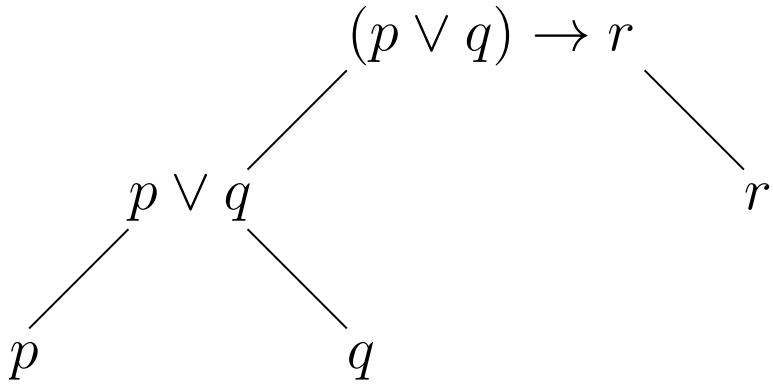
- *n-tá úroveň* stromu T pro $n \in \mathbb{N}$ je daná indukcí, obsahuje syny vrcholů z $(n-1)$-ní úrovně, 0-tá úroveň obsahuje právě kořen,
- *hloubka* stromu T je maximální číslo $n \in \mathbb{N}$ neprázdné úrovně; pokud má T nekonečnou větev, je *hloubka nekonečná* či ω.
- strom T je *n-ární* pro $n \in \mathbb{N}$, pokud každý vrchol má nejvýše n synů. Je *konečně větvící se*, má-li každý vrchol konečně mnoho synů.

Lemma (König) *Každý nekonečný, konečně větvící se strom T obsahuje nekonečnou větev.*

Důkaz Hledání nekonečné větve začneme v kořeni. Jelikož má jen konečně mnoho synů, existuje syn s nekonečně mnoha potomky. *Vybereme* ho a stejně pokračujeme v jeho podstromě. Takto získáme nekonečnou větev. □

Uspořádané stromy

- *Uspořádaný strom* je strom T, s kterým je dáno lineární uspořádání synů každého vrcholu, toto uspořádání se nazývá *pravolevé* a značí $<_L$. Oproti tomu, uspořádání $<_T$ se nazývá *stromové*.
- *značený strom* je strom T s libovolnou funkcí (*značící funkce*), která každému vrcholu T přiřazuje nějaký objekt (*značku*).
- značené uspořádané stromy např. zachycují strukturu formulí



Na závěr

- *Lze celou matematiku převést do logických formulí?*
  programování, AI, strojové dokazování, Peano: *Formulario* (1895-1908)
- *Proč to lidé (většinou) nedělají?*
- *Příklad* *Lze šachovnici bez dvou protilehlých rohů* perfektně *pokrýt kostkami domina?*

  Snadno vytvoříme výrokovou formuli, která je splnitelná, právě když to lze. Pak ji můžeme zkusit ověřit např. rezolucí.

  Jak to vyřešíme *elegantněji*? V čem náš postup spočívá?

Výroková a predikátová logika - II

Petr Gregor

KTIML MFF UK

ZS 2016/2017

Jazyk

Výroková logika je *"logikou spojek"*. Vycházíme z (neprázdné) množiny $\mathbb{P}$ *výrokových proměnných* (*prvovýroků*). Např.

$$\mathbb{P} = \{p, p_1, p_2, \ldots, q, q_1, q_2, \ldots\}$$

Obvykle budeme předpokládat, že $\mathbb{P}$ je spočetná.

Jazyk výrokové logiky (nad $\mathbb{P}$) obsahuje symboly

- výrokové proměnné z $\mathbb{P}$
- logické spojky $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
- závorky $($, $)$

Jazyk je tedy určen množinou $\mathbb{P}$. Říkáme, že logické spojky a závorky jsou *logické symboly*, zatímco výrokové proměnné jsou *mimologické symboly*.

Budeme používat i konstantní symboly $\top$ (pravda), $\bot$ (spor), jež zavedeme jako *zkratky* za $p \vee \neg p$, resp. $p \wedge \neg p$, kde p je pevný prvovýrok z $\mathbb{P}$.

Formule

Výrokové formule (*výroky*) (nad $\mathbb{P}$) jsou dány induktivním předpisem

(i) každá výroková proměnná z $\mathbb{P}$ je výrokovou formulí,

(ii) jsou-li φ, ψ výrokové formule, pak rovněž

$$(\neg\varphi)\ ,(\varphi \wedge \psi)\ ,(\varphi \vee \psi)\ ,(\varphi \to \psi)\ ,(\varphi \leftrightarrow \psi)$$

jsou výrokové formule,

(iii) každá výroková formule vznikne konečným užitím pravidel (i), (ii).

- Výrokové formule jsou tedy (dobře vytvořené) konečné posloupnosti symbolů jazyka (řetězce).
- Výrokovou formuli, která je součástí jiné výrokové formule φ nazveme *podformulí* (*podvýrokem*) φ.
- Množinu všech výrokových formulí nad $\mathbb{P}$ značíme $\mathrm{VF}_{\mathbb{P}}$.
- Množinu všech výrokových proměnných s výskytem ve φ značíme $\mathrm{var}(\varphi)$.

Konvence zápisu

Zavedení (obvyklých) *priorit* logických spojek umožňuje v zkráceném zápisu vypouštět závorky okolo podvýroku vzniklého spojkou s vyšší prioritou.

(1) $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

(2) $\wedge$, $\vee$

(3) $\neg$

Rovněž vnější závorky můžeme vynechat. Např.

$(((\neg p) \wedge q) \rightarrow (\neg(p \vee (\neg q))))$ lze zkrátit na $\neg p \wedge q \rightarrow \neg(p \vee \neg q)$

Poznámka Nerespektováním priorit může vzniknout nejednoznačný zápis nebo dokonce jednoznačný zápis neekvivalentní formule.

Další možnosti zjednodušení zápisu vyplývají ze sémantických vlastností spojek (asociativita $\vee$, $\wedge$).

Vytvořující strom

Vytvořující strom je konečný uspořádaný strom, jehož vrcholy jsou označeny výroky dle následujících pravidel

- listy (a jen listy) jsou označeny prvovýroky,
- je-li vrchol označen $(\neg\varphi)$, má jediného syna označeného φ,
- je-li vrchol označen $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$ nebo $(\varphi \leftrightarrow \psi)$, má dva syny, přičemž levý syn je označen φ a pravý je označen ψ.

Vytvořující strom výroku φ je vytvořující strom s kořenem označeným φ.

Tvrzení *Každý výrok má jednoznačně určený vytvořující strom.*

Důkaz Snadno indukcí dle počtu vnoření závorek (odpovídající hloubce vytvořujícího stromu). □

Poznámka Takovéto důkazy nazýváme důkazy indukcí dle struktury formule.

Sémantika

- Uvažujeme pouze dvouhodnotovou logiku.
- Prvovýroky reprezentují atomická tvrzení, jejich význam je určen přiřazením *pravdivostní hodnoty* 0 *(nepravda)* nebo 1 *(pravda)*.
- Sémantika logických spojek je dána jejich *pravdivostními tabulkami*.

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Ty jednoznačně určují hodnotu každého výroku z hodnot prvovýroků.

- K výrokům tedy můžeme také přiřadit *"pravdivostní tabulky"*. Říkáme, že reprezentují Booleovské funkce (až na určení pořadí proměnných).
- *Booleovská funkce* je n-ární operace na $2 = \{0, 1\}$.

Hodnota výroku

- *Ohodnocení* prvovýroků je funkce $v\colon \mathbb{P} \to \{0,1\}$, tj. $v \in {}^{\mathbb{P}}2$.
- *Hodnota* $\overline{v}(\varphi)$ výroku φ při ohodnocení v je dána induktivně

$$\overline{v}(p) = v(p) \text{ jestliže } p \in \mathbb{P} \qquad \overline{v}(\neg\varphi) = -_1(\overline{v}(\varphi))$$
$$\overline{v}(\varphi \wedge \psi) = \wedge_1(\overline{v}(\varphi), \overline{v}(\psi)) \qquad \overline{v}(\varphi \vee \psi) = \vee_1(\overline{v}(\varphi), \overline{v}(\psi))$$
$$\overline{v}(\varphi \to \psi) = \to_1(\overline{v}(\varphi), \overline{v}(\psi)) \qquad \overline{v}(\varphi \leftrightarrow \psi) = \leftrightarrow_1(\overline{v}(\varphi), \overline{v}(\psi))$$

kde $-_1, \wedge_1, \vee_1, \to_1, \leftrightarrow_1$ jsou Booleovské funkce dané tabulkami.

Tvrzení *Hodnota výroku φ závisí pouze na ohodnocení* $\mathrm{var}(\varphi)$.

Důkaz Snadno indukcí dle struktury formule. □

Poznámka Jelikož funkce $\overline{v}\colon \mathrm{VF}_{\mathbb{P}} \to 2$ je jednoznačnou extenzí funkce v, můžeme psát v místo $\overline{v}$ aniž by došlo k nedorozumění.

Sémantické pojmy

Výrok φ nad $\mathbb{P}$ je

- *splněn* (*platí*) *při ohodnocení* $v \in {}^{\mathbb{P}}2$, pokud $\overline{v}(\varphi) = 1$.
  Pak v je *splňující ohodnocení* výroku φ, značíme $v \models \varphi$.
- *pravdivý* ((logicky) *platí, tautologie*), pokud $\overline{v}(\varphi) = 1$ pro každé $v \in {}^{\mathbb{P}}2$, tj. φ je splněn při každém ohodnocení, značíme $\models \varphi$.
- *lživý* (*sporný*), pokud $\overline{v}(\varphi) = 0$ pro každé $v \in {}^{\mathbb{P}}2$, tj. $\neg\varphi$ je pravdivý.
- *nezávislý*, pokud $\overline{v_1}(\varphi) = 0$ a $\overline{v_2}(\varphi) = 1$ pro nějaká $v_1, v_2 \in {}^{\mathbb{P}}2$, tj. φ není ani pravdivý ani lživý.
- *splnitelný*, pokud $\overline{v}(\varphi) = 1$ pro nějaké $v \in {}^{\mathbb{P}}2$, tj. φ není lživý.

Výroky φ a ψ jsou (logicky) *ekvivalentní*, psáno $\varphi \sim \psi$, pokud $\overline{v}(\varphi) = \overline{v}(\psi)$ pro každé $v \in {}^{\mathbb{P}}2$, tj. výrok $\varphi \leftrightarrow \psi$ je pravdivý.

Modely

Předchozí definice ekvivalentně přeformulujeme v terminologii modelů.

Model jazyka nad $\mathbb{P}$ je ohodnocení z ${}^{\mathbb{P}}2$. Třída všech modelů jazyka nad $\mathbb{P}$ se značí $M(\mathbb{P})$, tedy $M(\mathbb{P}) = {}^{\mathbb{P}}2$. Výrok φ nad $\mathbb{P}$ (je)

- *platí v modelu* $v \in M(\mathbb{P})$, pokud $\overline{v}(\varphi) = 1$. Pak v je *model výroku* φ, značíme $v \models \varphi$ a $M^{\mathbb{P}}(\varphi) = \{v \in M(\mathbb{P}) \mid v \models \varphi\}$ je *třída modelů* φ.
- *pravdivý* ((logicky) *platí, tautologie*), pokud platí v každém modelu (jazyka), značíme $\models \varphi$.
- *lživý* (*sporný*), pokud nemá model.
- *nezávislý*, pokud platí v nějakém modelu a neplatí v jiném.
- *splnitelný*, pokud má model.

Výroky φ a ψ jsou (logicky) *ekvivalentní*, psáno $\varphi \sim \psi$, pokud mají stejné modely.

Univerzálnost spojek

Jazyk výrokové logiky obsahuje *základní* spojky $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.

Můžeme zavést obecně n-ární spojku pro libovolnou Booleovu funkci. Např.

$p \downarrow q$ *"ani p ani q"* (NOR, Peirceova spojka)

$p \uparrow q$ *"ne (p a q)"* (NAND, Shefferova spojka)

Množina spojek je *univerzální*, pokud lze každou Booleovskou funkci reprezentovat nějakým z nich (dobře) vytvořeným výrokem.

Tvrzení $\{\neg, \wedge, \vee\}$ *je univerzální.*

Důkaz Funkci $f : {}^n2 \to 2$ reprezentuje výrok $\bigvee_{v \in f^{-1}[1]} \bigwedge_{i=0}^{n-1} p_i^{v(i)}$, kde $p_i^{v(i)}$ je prvovýrok p_i pokud $v(i) = 1$, jinak výrok $\neg p_i$. Pro $f^{-1}[1] = \emptyset$ zvolíme $\bot$. □

Tvrzení $\{\neg, \rightarrow\}$ *je univerzální.*

Důkaz $(p \wedge q) \sim \neg(p \rightarrow \neg q)$, $(p \vee q) \sim (\neg p \rightarrow q)$. □

CNF a DNF

- *Literál* je prvovýrok nebo jeho negace. Je-li p prvovýrok, označme p^0 literál $\neg p$ a p^1 literál p. Je-li l literál, označme $\bar{l}$ literál *opačný* k l.
- *Klauzule* je disjunkce literálů, prázdnou klauzulí rozumíme $\bot$.
- Výrok je v *konjunktivně normálním tvaru* (*CNF*), je-li konjunkcí klauzulí. Prázdným výrokem v CNF rozumíme $\top$.
- *Elementární konjunkce* je konjunkce literálů, prázdnou konjunkcí je $\top$.
- Výrok je v *disjunktivně normálním tvaru* (*DNF*), je-li disjunkcí elementárních konjunkcí. Prázdným výrokem v DNF rozumíme $\bot$.

Poznámka Klauzule nebo elementární konjunkce je zároveň v CNF i DNF.

Pozorování *Výrok v CNF je pravdivý, právě když každá jeho klauzule obsahuje dvojici opačných literálů. Výrok v DNF je splnitelný, právě když aspoň jedna jeho elementární konjunkce neobsahuje dvojici opačných literálů.*

Převod tabulkou

Tvrzení *Nechť $K \subseteq {}^{\mathbb{P}}2$ pro $\mathbb{P}$ konečné. Označme $\overline{K} = {}^{\mathbb{P}}2 \setminus K$. Pak*

$$M^{\mathbb{P}}\Big(\bigvee_{v \in K} \bigwedge_{p \in \mathbb{P}} p^{v(p)}\Big) = K = M^{\mathbb{P}}\Big(\bigwedge_{v \in \overline{K}} \bigvee_{p \in \mathbb{P}} \overline{p^{v(p)}}\Big)$$

Důkaz První rovnost plyne z $\overline{w}(\bigwedge_{p \in \mathbb{P}} p^{v(p)}) = 1$ právě když $w = v$, kde $w \in {}^{\mathbb{P}}2$. Druhá obdobně z $\overline{w}(\bigvee_{p \in \mathbb{P}} \overline{p^{v(p)}}) = 1$ právě když $w \neq v$. □

Např. $K = \{(1,0,0),(1,1,0),(0,1,0),(1,1,1)\}$ namodelujeme

$$(p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r) \sim$$
$$(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r)$$

Důsledek *Každý výrok je ekvivalentní nějakému výroku v CNF/DNF.*

Důkaz Hodnota výroku φ závisí pouze na ohodnocení jeho proměnných, kterých je konečně. Lze tedy použít tvrzení pro $K = M^{\mathbb{P}}(\varphi)$ a $\mathbb{P} = \mathrm{var}(\varphi)$. □

Převod úpravami

Tvrzení *Nechť φ' je výrok vzniklý z výroku φ nahrazením některých výskytů podvýroku ψ za výrok ψ'. Jestliže $\psi \sim \psi'$, pak $\varphi \sim \varphi'$.*

Důkaz Snadno indukcí dle struktury formule. □

(1) $(\varphi \to \psi) \sim (\neg\varphi \vee \psi)$, $\quad (\varphi \leftrightarrow \psi) \sim ((\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi))$

(2) $\neg\neg\varphi \sim \varphi$, $\quad \neg(\varphi \wedge \psi) \sim (\neg\varphi \vee \neg\psi)$, $\quad \neg(\varphi \vee \psi) \sim (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

(3) $(\varphi \vee (\psi \wedge \chi)) \sim ((\psi \wedge \chi) \vee \varphi) \sim ((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi))$

(3)' $(\varphi \wedge (\psi \vee \chi)) \sim ((\psi \vee \chi) \wedge \varphi) \sim ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi))$

Tvrzení *Každý výrok lze pomocí $(1), (2), (3)/(3)'$ převést na CNF / DNF.*

Důkaz Snadno indukcí dle struktury formule. □

Tvrzení *Nechť výrok φ obsahuje pouze spojky $\neg$, $\wedge$, $\vee$. Pak pro výrok φ^* vzniklý z φ záměnou $\wedge$ a $\vee$ a znegováním všech literálů platí $\neg\varphi \sim \varphi^*$.*

Důkaz Snadno indukcí dle struktury formule. □

2-SAT

- Výrok je v *k-CNF*, je-li v CNF a každá jeho klauzule má nejvýše k literálů.
- *k-SAT* je následující problém (pro pevné $k > 0$)
  INSTANCE: *Výrok φ v k-CNF.*
  OTÁZKA: *Je φ splnitelný?*

Zatímco už pro $k = 3$ jde o NP-úplný problém, ukážeme, že 2-SAT lze řešit v *lineárním* čase (vzhledem k délce φ).

Vynecháme implementační detaily (výpočetní model, reprezentace v paměti) a využijeme následující znalosti, viz [ADS I].

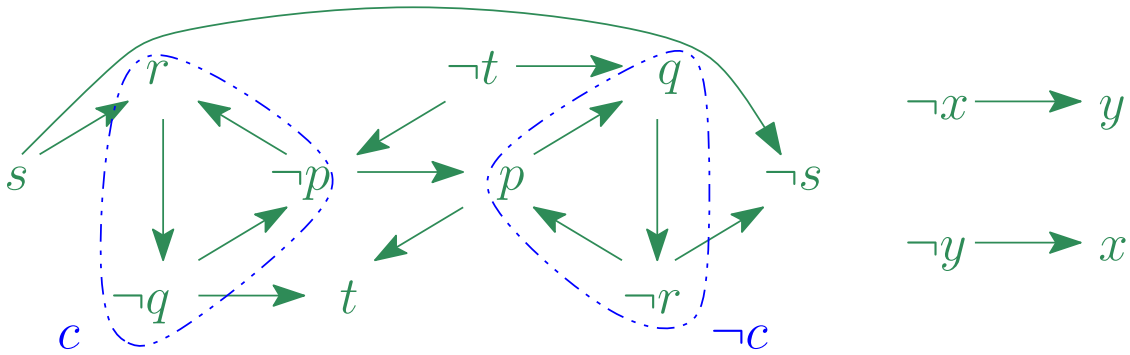
Tvrzení *Rozklad orientovaného grafu (V, E) na silně souvislé komponenty lze nalézt v čase $\mathcal{O}(|V| + |E|)$.*

- Orientovaný graf G je *silně souvislý*, pokud pro každé dva vrcholy u a v existují v G orientované cesty jak z u do v, tak i z v do u.
- Silně souvislá *komponenta* grafu G je maximální silně souvislý podgraf G.

Implikační graf

Implikační graf výroku φ v 2-CNF je orientovaný graf G_φ, v němž

- vrcholy jsou proměnné výroku φ nebo jejich negace,
- klauzuli $l_1 \vee l_2$ výroku φ reprezentujeme dvojicí hran $\overline{l_1} \to l_2$, $\overline{l_2} \to l_1$,
- klauzuli l_1 výroku φ reprezentujeme hranou $\overline{l_1} \to l_1$.



$$p \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee r) \wedge (r \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee t) \wedge (q \vee t) \wedge \neg s \wedge (x \vee y)$$

Tvrzení *φ je splnitelný, právě když žádná silně souvislá komponenta v G_φ neobsahuje dvojici opačných literálů.*

Důkaz Každé splňující ohodnocení ohodnotí všechny literály ze stejné komponenty stejně. Implikace zleva doprava tedy platí.

Nalezení ohodnocení

Naopak, označme G^*_φ graf vzniklý z G_φ kontrakcí silně souvislých komponent.

Pozorování *G^*_φ je acyklický, má tedy topologické uspořádání $<$.*

- Orientovaný graf je *acyklický*, neobsahuje-li orientovaný *cyklus*.
- Lineární uspořádání $<$ vrcholů orientovaného grafu je *topologické*, pokud $p < q$ pro každou hranu z p do q.

Nyní pro každou komponentu v rostoucím pořadí dle $<$, nejsou-li její literály dosud ohodnocené, nastav je na 0 a literály v opačné komponentě na 1.

Zbývá ukázat, že takto získané ohodnocení v splňuje φ. Kdyby ne, existovaly by v G^*_φ hrany $p \to q$ a $\overline{q} \to \overline{p}$ s $v(p) = 1$ a $v(q) = 0$. To je ve sporu s pořadím nastavení komponent na 0 resp. 1, neboť $p < q$ a $\overline{q} < \overline{p}$. □

Důsledek *2-SAT je řešitelný v lineárním čase.*

Horn-SAT

- *Jednotková klauzule* je klauzule obsahující jediný literál,
- *Hornova klauzule* je klauzule obsahující nejvýše jeden pozitivní literál,

$$\neg p_1 \vee \cdots \vee \neg p_n \vee q \quad \sim \quad (p_1 \wedge \cdots \wedge p_n) \rightarrow q$$

- *Hornův výrok* je konjunkcí Hornových klauzulí,
- *Horn-SAT* je problém splnitelnosti daného Hornova výroku.

Algoritmus

(1) *obsahuje-li φ dvojici jednotkových klauzulí l a $\bar{l}$, není splnitelný,*

(2) *obsahuje-li φ jednotkovou klauzuli l, nastav l na 1, odstraň všechny klauzule obsahující l, odstraň $\bar{l}$ ze všech klauzulí a opakuj od začátku,*

(3) *neobsahuje-li φ jednotkovou klauzuli, je splnitelný ohodnocením 0 všech zbývajících proměnných.*

Krok (2) se nazývá *jednotková propagace*.

Jednotková propagace

$$(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee \neg s) \wedge (\neg t \vee s) \wedge s \qquad v(s) = 1$$
$$(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge \neg r \qquad v(\neg r) = 1$$
$$(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \qquad v(p) = v(q) = v(t) = 0$$

Pozorování *Nechť φ^l je výrok získaný z φ jednotkovou propagací. Pak φ^l je splnitelný, právě když φ je splnitelný.*

Důsledek *Algoritmus je korektní (řeší Horn-SAT).*

Důkaz Korektnost 1. kroku je zřejmá, v 2. kroku plyne z pozorování, v 3.kroku díky *Hornově tvaru*, neboť každá zbývající klauzule obsahuje negativní literál.

Poznámka Přímočará implementace vyžaduje kvadratický čas, při vhodné reprezentaci v paměti lze dosáhnout lineárního času (vzhledem k délce φ).

Výroková a predikátová logika - III

Petr Gregor

KTIML MFF UK

ZS 2016/2017

Teorie

Neformálně, teorie je popis "světa", na který vymezujeme svůj diskurz.

- Výroková *teorie* nad jazykem $\mathbb{P}$ je libovolná množina T výroků z $\mathrm{VF}_{\mathbb{P}}$. Výrokům z T říkáme *axiomy* teorie T.
- *Model teorie* T nad $\mathbb{P}$ je ohodnocení $v \in M(\mathbb{P})$ (tj. model jazyka), ve kterém platí všechny axiomy z T, značíme $v \models T$.
- *Třída modelů* T je $M^{\mathbb{P}}(T) = \{v \in M(\mathbb{P}) \mid v \models \varphi \text{ pro každé } \varphi \in T\}$.

  Např. pro teorii $T = \{p,\ \neg p \vee \neg q,\ q \to r\}$ nad $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$ je

  $$M^{\mathbb{P}}(T) = \{(1,0,0), (1,0,1)\}$$

- Je-li teorie T konečná, lze ji nahradit *konjunkcí* jejích axiomů.
- Zápis $M(T, \varphi)$ značí $M(T \cup \{\varphi\})$.

Sémantika vzhledem k teorii

Sémantické pojmy zobecníme vzhledem k teorii, respektive k jejím modelům.

Nechť T je teorie nad $\mathbb{P}$. Výrok φ nad $\mathbb{P}$ je

- *pravdivý v T* (*platí v T*), pokud platí v každém modelu T, značíme $T \models \varphi$, Říkáme také, že φ je (sémantickým) *důsledkem* teorie T.
- *lživý v T* (*sporný v T*), pokud neplatí v žádném modelu teorie T,
- *nezávislý v T*, pokud platí v nějakém modelu teorie T a neplatí v jiném,
- *splnitelný v T* (*konzistentní s T*), pokud platí v nějakém modelu T.

Výroky φ a ψ jsou *ekvivalentní v T* (*T-ekvivalentní*), psáno $\varphi \sim_T \psi$, pokud každý model teorie T je modelem φ právě když je modelem ψ.

Poznámka Jsou-li všechny axiomy teorie T pravdivé (tautologie), např. pro $T = \emptyset$, všechny pojmy vzhledem k T se shodují s původními (logickými) pojmy.

Důsledek teorie

Důsledek teorie T nad $\mathbb{P}$ je množina $\theta^{\mathbb{P}}(T)$ všech výroků pravdivých v T, tj.

$$\theta^{\mathbb{P}}(T) = \{\varphi \in \mathrm{VF}_{\mathbb{P}} \mid T \models \varphi\}.$$

Tvrzení *Pro každé dvě teorie $T \subseteq T'$ a výroky $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ nad $\mathbb{P}$ platí*

(1) $T \subseteq \theta^{\mathbb{P}}(T) = \theta^{\mathbb{P}}(\theta^{\mathbb{P}}(T)) \subseteq \theta^{\mathbb{P}}(T')$,

(2) $\varphi \in \theta^{\mathbb{P}}(\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\})$ *právě když* $\models (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \to \varphi$.

Důkaz Dle definic, $T \models \varphi \Leftrightarrow M(T) \subseteq M(\varphi)$ a $M(T') \subseteq M(T) = M(\theta(T))$.

(1) $$\varphi \in T \Rightarrow M(T) \subseteq M(\varphi) \Leftrightarrow T \models \varphi \Leftrightarrow \varphi \in \theta(T) \Leftrightarrow$$
$$M(\theta(T)) \subseteq M(\varphi) \Leftrightarrow \theta(T) \models \varphi \Leftrightarrow \varphi \in \theta(\theta(T)) \Rightarrow$$
$$M(T') \subseteq M(\varphi) \Leftrightarrow T' \models \varphi \Leftrightarrow \varphi \in \theta(T')$$

Část (2) plyne obdobně z $M(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = M(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n)$ a $\models \psi \to \varphi$ právě když $M(\psi) \subseteq M(\varphi)$. $\square$

Vlastnosti teorií

Výroková teorie T nad $\mathbb{P}$ je *(sémanticky)*

- *sporná*, jestliže v ní platí $\bot$ (spor), jinak je *bezesporná* (*splnitelná*),
- *kompletní*, jestliže není sporná a každý výrok je v ní pravdivý či lživý, tj. žádný výrok v ní není nezávislý,
- *extenze* teorie T' nad $\mathbb{P}'$, jestliže $\mathbb{P}' \subseteq \mathbb{P}$ a $\theta^{\mathbb{P}'}(T') \subseteq \theta^{\mathbb{P}}(T)$,
  o extenzi T teorie T' řekneme, že je *jednoduchá*, pokud $\mathbb{P} = \mathbb{P}'$, a *konzervativní*, pokud $\theta^{\mathbb{P}'}(T') = \theta^{\mathbb{P}}(T) \cap \mathrm{VF}_{\mathbb{P}'}$,
- *ekvivalentní* s teorií T', jestliže T je extenzí T' a T' je extenzí T,

Pozorování *Nechť T a T' jsou teorie nad $\mathbb{P}$. Teorie T je (sémanticky)*

(1) *bezesporná, právě když má model,*
(2) *kompletní, právě když má jediný model,*
(3) *extenze T', právě když $M^{\mathbb{P}}(T) \subseteq M^{\mathbb{P}}(T')$,*
(4) *ekvivalentní s T', právě když $M^{\mathbb{P}}(T) = M^{\mathbb{P}}(T')$.*

Algebra výroků

Nechť T je bezesporná teorie nad $\mathbb{P}$. Na množině $\mathrm{VF}_{\mathbb{P}}/\sim_T$ lze zadefinovat operace $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\bot$, $\top$ (korektně) pomocí reprezentantů, např.

$$[\varphi]_{\sim_T} \wedge [\psi]_{\sim_T} = [\varphi \wedge \psi]_{\sim_T}$$

Pak $AV^{\mathbb{P}}(T) = \langle \mathrm{VF}_{\mathbb{P}}/\sim_T, \neg, \wedge, \vee, \bot, \top \rangle$ je *algebra výroků* vzhledem k T.

Jelikož $\varphi \sim_T \psi \Leftrightarrow M(T,\varphi) = M(T,\psi)$, je $h([\varphi]_{\sim_T}) = M(T,\varphi)$ korektně definovaná prostá funkce $h\colon \mathrm{VF}_{\mathbb{P}}/\sim_T \to \mathcal{P}(M(T))$ a platí

$$h(\neg[\varphi]_{\sim_T}) = M(T) \setminus M(T,\varphi)$$
$$h([\varphi]_{\sim_T} \wedge [\psi]_{\sim_T}) = M(T,\varphi) \cap M(T,\psi)$$
$$h([\varphi]_{\sim_T} \vee [\psi]_{\sim_T}) = M(T,\varphi) \cup M(T,\psi)$$
$$h([\bot]_{\sim_T}) = \emptyset, \quad h([\top]_{\sim_T}) = M(T)$$

Navíc h je *na*, pokud $M(T)$ je *konečná*.

Důsledek Je-li T bezesporná nad konečnou $\mathbb{P}$, je $AV^{\mathbb{P}}(T)$ Booleova algebra *izomorfní* s (konečnou) potenční algebrou $\underline{\mathcal{P}}(M(T))$ via h.

Analýza teorií nad konečně prvovýroky

Nechť T je bezesporná teorie nad $\mathbb{P}$, kde $|\mathbb{P}| = n \in \mathbb{N}^+$ a $m = |M^{\mathbb{P}}(T)|$. Pak

- neekvivalentních výroků (popř. teorií) nad $\mathbb{P}$ je 2^{2^n},
- neekvivalentních výroků nad $\mathbb{P}$ pravdivých (lživých) v T je 2^{2^n-m},
- neekvivalentních výroků nad $\mathbb{P}$ nezávislých v T je $2^{2^n} - 2.2^{2^n-m}$,
- neekvivalentních jednoduchých extenzí teorie T je 2^m, z toho sporná 1,
- neekvivalentních kompletních jednoduchých extenzí teorie T je m,
- T-neekvivalentních výroků nad $\mathbb{P}$ je 2^m,
- T-neekvivalentních výroků nad $\mathbb{P}$ pravdivých (lživých) (v T) je 1,
- T-neekvivalentních výroků nad $\mathbb{P}$ nezávislých (v T) je $2^m - 2$.

Důkaz Díky bijekci $\mathrm{VF}_{\mathbb{P}}/\sim$ resp. $\mathrm{VF}_{\mathbb{P}}/\sim_T$ s $\mathcal{P}(M(\mathbb{P}))$ resp. $\mathcal{P}(M^{\mathbb{P}}(T))$ stačí zjistit počet podmnožin s vhodnou vlastností. □

Formální dokazovací systémy

Naším cílem je přesně formalizovat pojem důkazu jako syntaktické procedury.

Ve *(standardních)* formálních dokazovacích systémech,

- důkaz je konečný objekt, může vycházet z axiomů dané teorie,
- $T \vdash \varphi$ značí, že φ je *dokazatelná* z T,
- pokud důkaz dané formule existuje, lze ho nalézt *"algoritmicky"*, (Je-li T *"rozumně zadaná"*.)

Od formálního dokazovacího systému obvykle očekáváme, že bude

- *korektní*, tj. každá formule φ dokazatelná z teorie T je v T pravdivá,
- nejlépe i *úplný*, tj. každá formule φ pravdivá v T je z T dokazatelná.

Příklady formálních dokazovacích systémů (kalkulů): tablo metody, *Hilbertovské systémy, Gentzenovy systémy, systémy přirozené dedukce*.

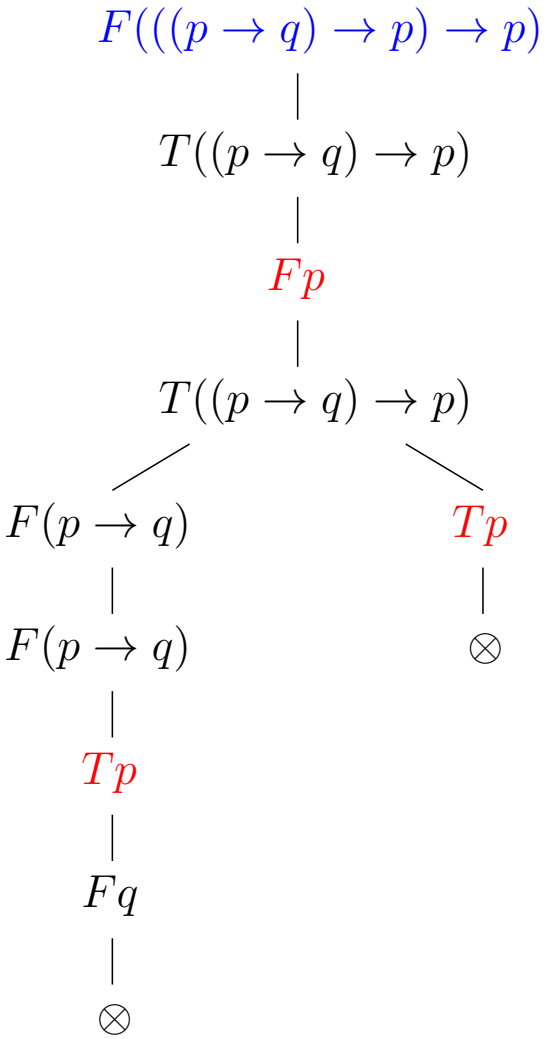
Tablo metoda - úvod

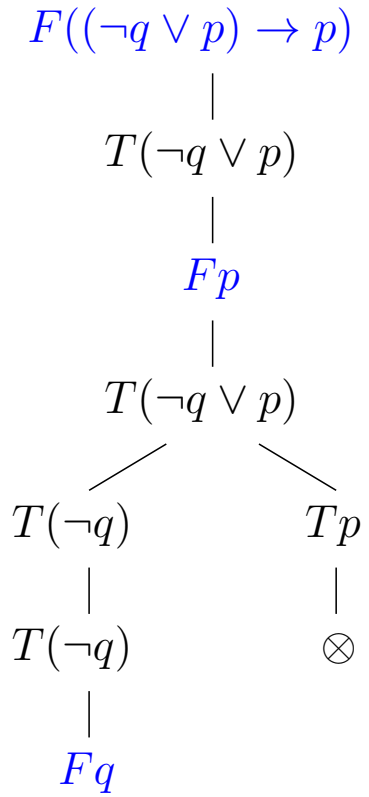
Budeme předpokládat, že jazyk je pevný a spočetný, tj. množina prvovýroků $\mathbb{P}$ je spočetná. Pak každá teorie nad $\mathbb{P}$ je spočetná.

Hlavní rysy tablo metody *(neformálně)*

- tablo pro danou formuli φ je binární značkovaný strom reprezentující vyhledávání *protipříkladu* k φ, tj. modelu teorie, ve kterém φ neplatí,
- formule má důkaz, pokud každá větev příslušného tabla selže, tj. nebyl nalezen protipříklad, v tom případě bude (systematické) tablo konečné,
- pokud protipříklad existuje, v (dokončeném) tablu bude větev, která ho poskytuje, tato větev může být i nekonečná.

Úvodní příklady





Komentář k příkladům

Vrcholy tabla jsou značeny *položkami*. Položka je formule s *příznakem* T / F, který reprezentuje předpoklad, že formule v nějakém modelu platí / neplatí. Je-li tento předpoklad u položky správný, je správný i v nějaké větvi pod ní.

V obou příkladech jde o dokončená (systematická) tabla z prázdné teorie.

- Vlevo je *tablo důkaz* pro $((p \to q) \to p) \to p$. Všechny větve tabla *"selhaly"*, značeno $\otimes$, neboť je na nich dvojice $T\varphi$, $F\varphi$ pro nějaké φ *(protipříklad tedy nelze nalézt)*. Formule má důkaz, píšeme
$$\vdash ((p \to q) \to p) \to p$$
- Vpravo je (dokončené) tablo pro $(\neg q \vee p) \to p$. Levá větev *"neselhala"* a je dokončená (není třeba v ní pokračovat) *(ta poskytuje protipříklad* $v(p) = v(q) = 0$*)*.

Atomická tabla

Atomické tablo je jeden z následujících (položkami značkovaných) stromů, kde p je libovolná výroková proměnná a φ, ψ jsou libovolné výrokové formule.

Tp	Fp	$T(\varphi \wedge \psi)$ | $T\varphi$ | $T\psi$	$F(\varphi \wedge \psi)$ / \\ $F\varphi$ $F\psi$	$T(\varphi \vee \psi)$ / \\ $T\varphi$ $T\psi$	$F(\varphi \vee \psi)$ | $F\varphi$ | $F\psi$
$T(\neg\varphi)$ | $F\varphi$	$F(\neg\varphi)$ | $T\varphi$	$T(\varphi \to \psi)$ / \\ $F\varphi$ $T\psi$	$F(\varphi \to \psi)$ | $T\varphi$ | $F\psi$	$T(\varphi \leftrightarrow \psi)$ / \\ $T\varphi$ $F\varphi$ | | $T\psi$ $F\psi$	$F(\varphi \leftrightarrow \psi)$ / \\ $T\varphi$ $F\varphi$ | | $F\psi$ $T\psi$

Pomocí atomických tabel a pravidel, jak tabla rozvinout (prodloužit), formálně zadefinujeme všechna tabla (popíšeme jejich konstrukci).

Tablo

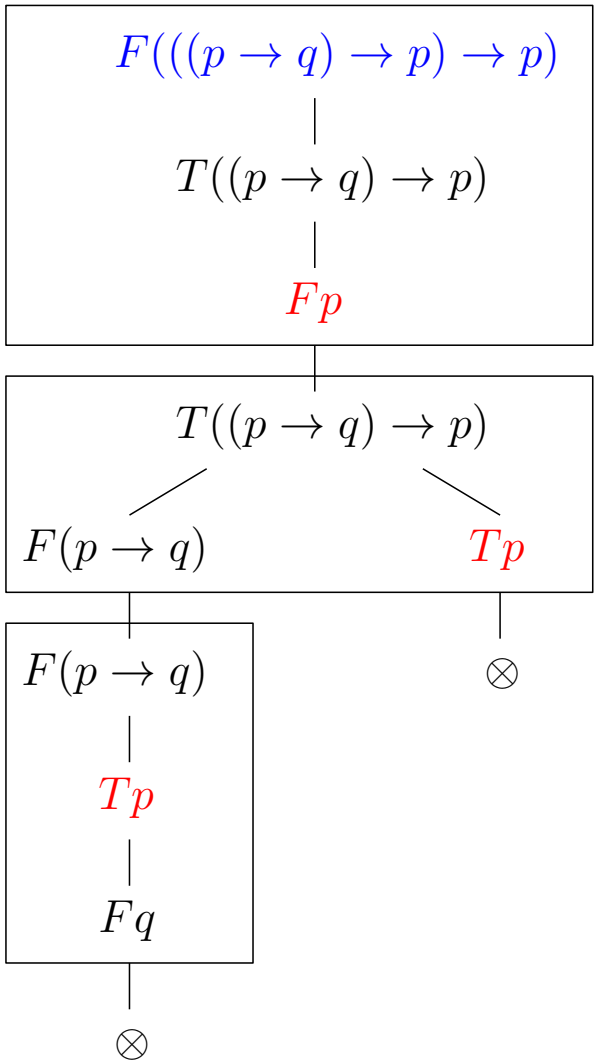
Konečné tablo je binární, položkami značkovaný strom daný předpisem

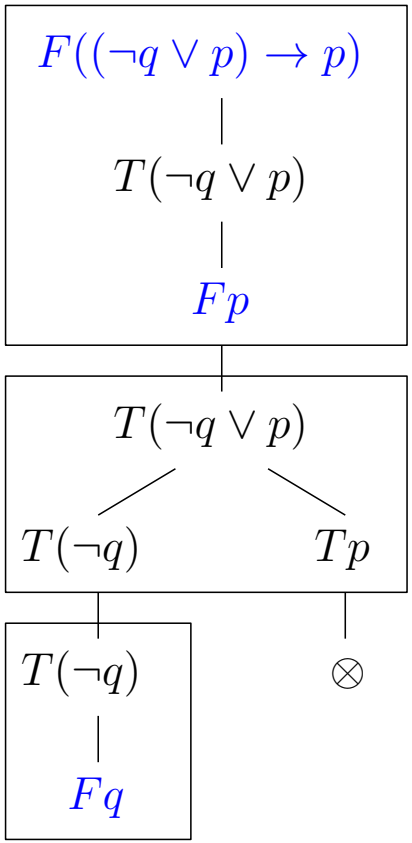
- (i) každé atomické tablo je konečné tablo,
- (ii) je-li P položka na větvi V konečného tabla τ a τ' vznikne z τ připojením atomického tabla pro P na konec větve V, je τ' rovněž konečné tablo,
- (iii) každé konečné tablo vznikne konečným užitím pravidel (i), (ii).

Tablo je posloupnost $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n, \ldots$ (konečná i nekonečná) konečných tabel takových, že τ_{n+1} vznikne z τ_n pomocí pravidla (ii), formálně $\tau = \cup\tau_n$.

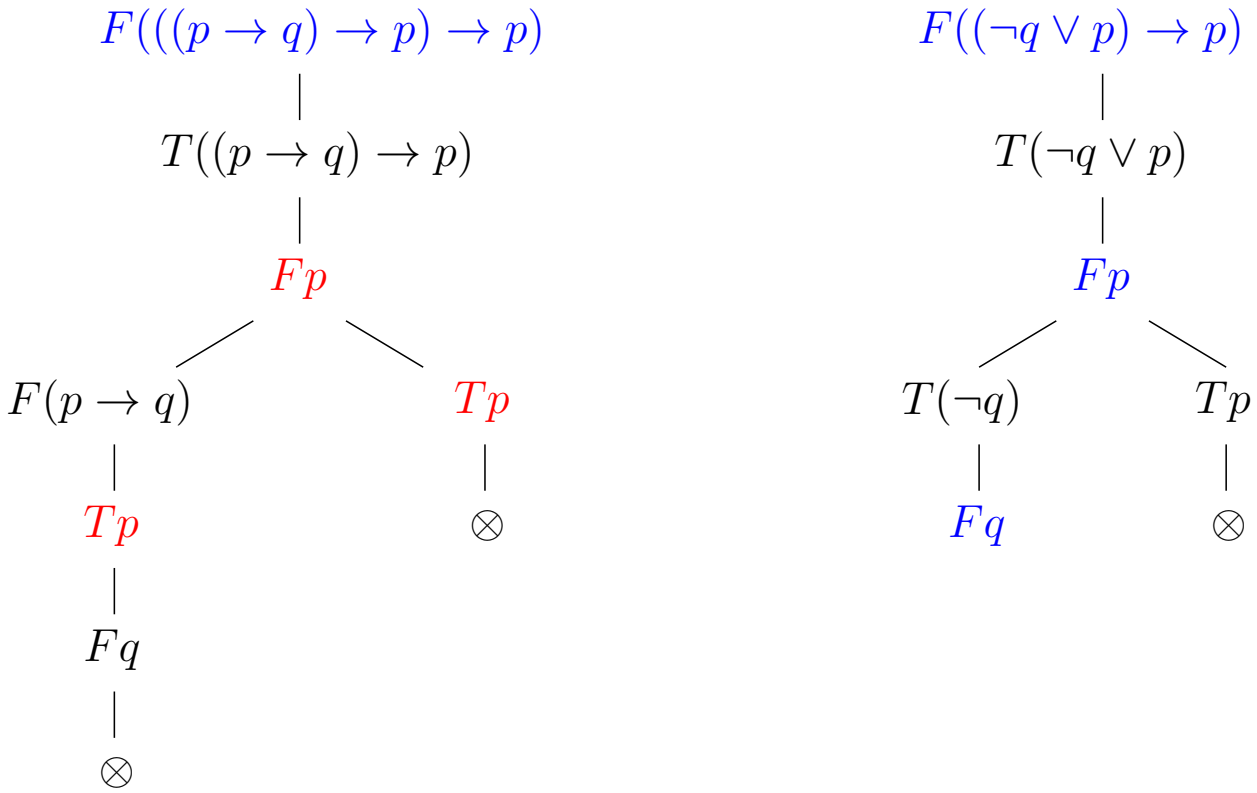
Poznámka *Není předepsané, jak položku P a větev V pro krok (ii) vybírat. To specifikujeme až v systematických tablech.*

Konstrukce tabla





Konvence



Položku, dle které tablo prodlužujeme, nebudeme na větvi znovu zobrazovat.

Poznámka *Její zopakování bude potřeba později v predikátové logice.*

Tablo důkaz

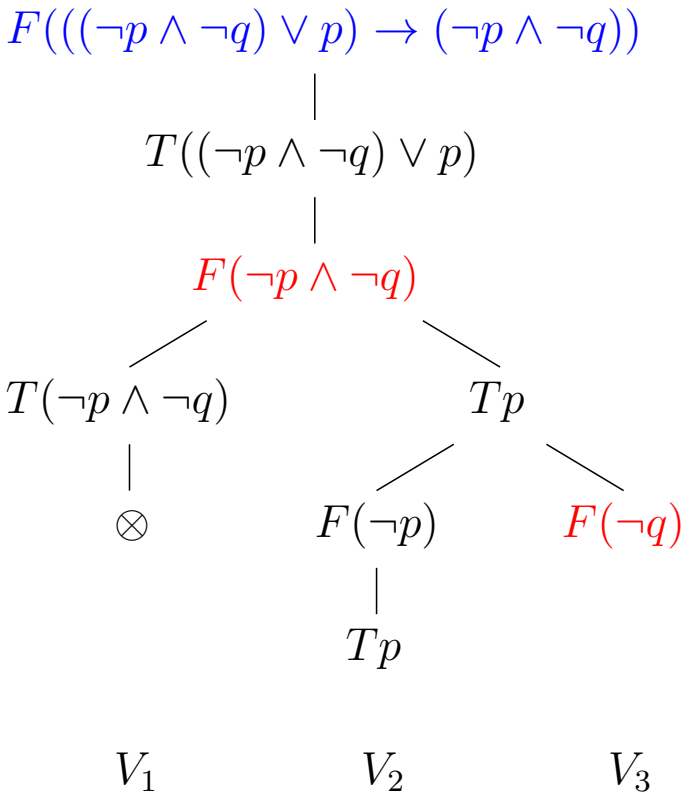
Nechť P je položka na větvi V tabla τ. Řekneme, že

- položka P je *redukovaná* na V, pokud se na V vyskytuje jako kořen atomického tabla, tj. při konstrukci τ již došlo k jejímu rozvoji na V,
- větev V je *sporná*, obsahuje-li položky $T\varphi$ a $F\varphi$ pro nějakou formuli φ, jinak je *bezesporná*. Větev V je *dokončená*, je-li sporná nebo je každá její položka redukovaná na V,
- tablo τ je *dokončené*, pokud je každá jeho větev dokončená, a je *sporné*, pokud je každá jeho větev sporná.

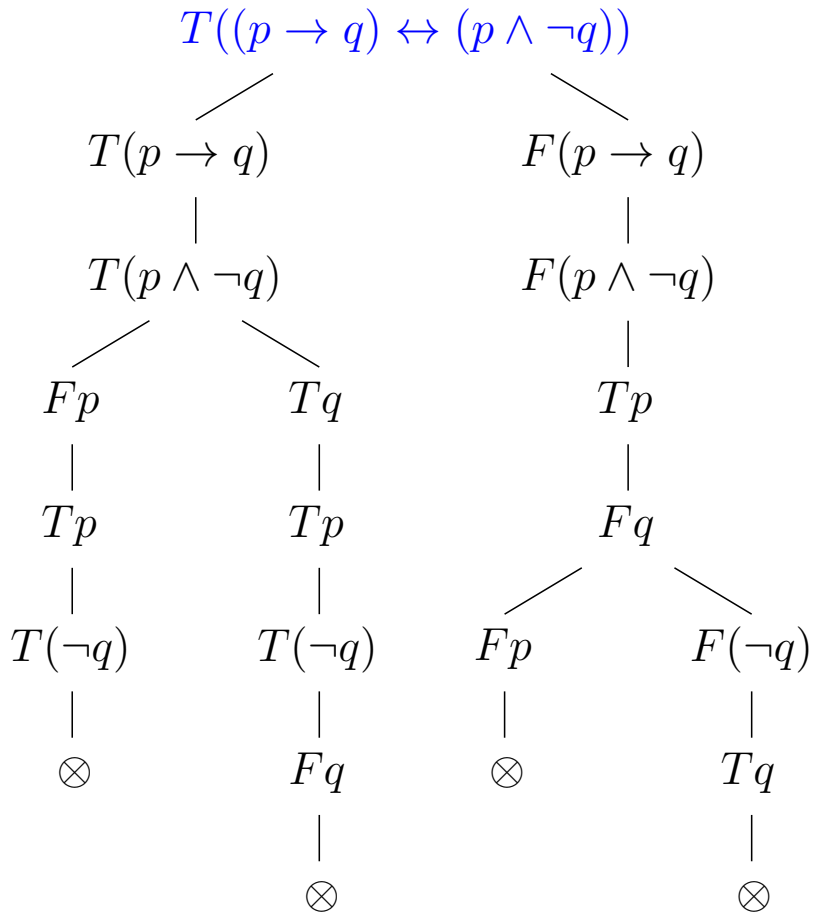
Tablo důkaz (*důkaz tablem*) výrokové formule φ je sporné tablo s položkou $F\varphi$ v kořeni. φ je *(tablo) dokazatelná*, píšeme $\vdash \varphi$, má-li tablo důkaz.

Obdobně, *zamítnutí* formule φ *tablem* je sporné tablo s položkou $T\varphi$ v kořeni. Formule φ je *(tablo) zamítnutelná*, má-li zamítnutí tablem, tj. $\vdash \neg\varphi$.

Příklady



$a)$



$b)$

a) $F(\neg p \wedge \neg q)$ neredukovaná na V_1, V_1 sporná, V_2 je dokončená, V_3 není,

b) zamítnutí tablem výrokové formule φ: $(p \to q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$, tedy $\vdash \neg\varphi$.

Tablo z teorie

Jak do důkazu přidat axiomy dané teorie T?

Konečné tablo z teorie T je zobecnění konečného tabla přidáním pravidla

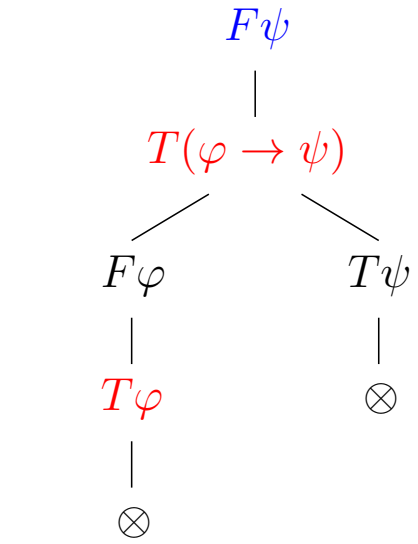
(ii)' je-li V větev konečného tabla (z T) a $\varphi \in T$, pak připojením $T\varphi$ na konec V vznikne (také) konečné tablo z T.

Přidáním dodatku *"z teorie T"* přirozeně zobecníme další pojmy

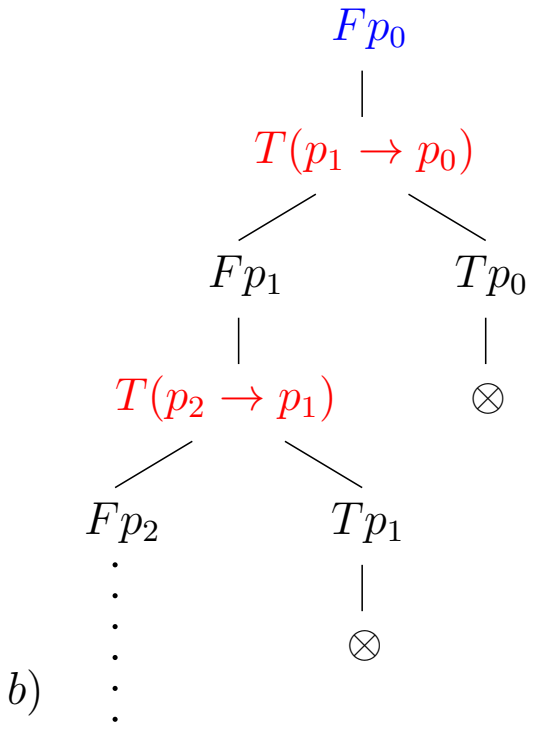
- *tablo z teorie* T je posloupnost $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n, \ldots$ konečných tabel z T takových, že τ_{n+1} vznikne z τ_n pomocí (ii) či (ii)', formálně $\tau = \cup\tau_n$,
- *tablo důkaz* formule φ *z teorie* T je sporné tablo z T s $F\varphi$ v kořeni, Má-li φ tablo důkaz z T, je *(tablo) dokazatelná z* T, píšeme $T \vdash \varphi$.
- *zamítnutí* formule φ *tablem z teorie* T je sporné tablo z T s $T\varphi$ v kořeni.

Narozdíl od předchozích definic, u tabla z teorie T je větev V *dokončená*, je-li sporná, nebo je každá její položka redukovaná na V a navíc obsahuje $T\varphi$ pro každé $\varphi \in T$.

Příklady tabla z teorie



$a)$



$b)$

a) Tablo důkaz formule ψ z teorie $T = \{\varphi, \varphi \to \psi\}$, tedy $T \vdash \psi$.

b) Dokončené tablo pro formuli p_0 z teorie $T = \{p_{n+1} \to p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Všechny větve jsou dokončené, nejlevější větev je bezesporná a nekonečná. Poskytuje (jediný) model teorie T, ve kterém p_0 neplatí.

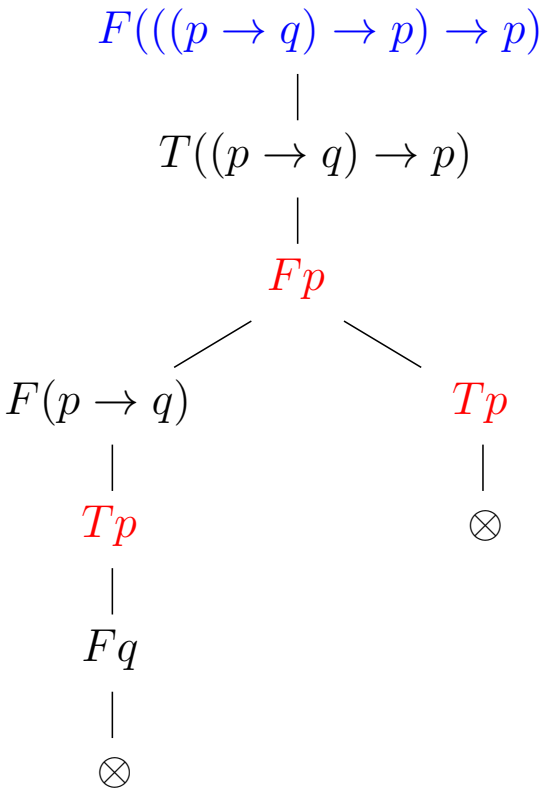
Výroková a predikátová logika - IV

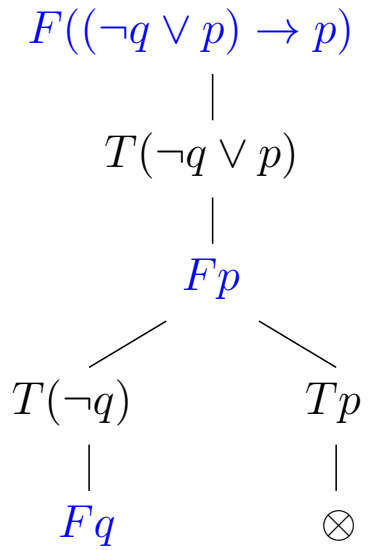
Petr Gregor

KTIML MFF UK

ZS 2016/2017

Tablo - příklady





Atomická tabla

Atomické tablo je jeden z následujících (položkami značkovaných) stromů, kde p je libovolná výroková proměnná a φ, ψ jsou libovolné výrokové formule.

Tp	Fp	$T(\varphi \wedge \psi)$ | $T\varphi$ | $T\psi$	$F(\varphi \wedge \psi)$ / \\ $F\varphi$ $F\psi$	$T(\varphi \vee \psi)$ / \\ $T\varphi$ $T\psi$	$F(\varphi \vee \psi)$ | $F\varphi$ | $F\psi$
$T(\neg\varphi)$ | $F\varphi$	$F(\neg\varphi)$ | $T\varphi$	$T(\varphi \to \psi)$ / \\ $F\varphi$ $T\psi$	$F(\varphi \to \psi)$ | $T\varphi$ | $F\psi$	$T(\varphi \leftrightarrow \psi)$ / \\ $T\varphi$ $F\varphi$ | | $T\psi$ $F\psi$	$F(\varphi \leftrightarrow \psi)$ / \\ $T\varphi$ $F\varphi$ | | $F\psi$ $T\psi$

Tablo z teorie

Konečné tablo z teorie T je binární, položkami značkovaný strom daný předpisem

- (i) každé atomické tablo je konečné tablo,
- (ii) je-li P položka na větvi V konečného tabla τ a τ' vznikne z τ připojením atomického tabla pro P na konec větve V, je τ' rovněž konečné tablo,
- (ii)' je-li V větev konečného tabla (z T) a $\varphi \in T$, pak připojením $T\varphi$ na konec V vznikne rovněž konečné tablo z T.
- (iii) každé konečné tablo vznikne konečným užitím pravidel (i), (ii), (ii)'.

Tablo z teorie T je posloupnost $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n, \ldots$ konečných tabel z T takových, že τ_{n+1} vznikne z τ_n pomocí pravidla (ii) či (ii)', formálně $\tau = \cup\tau_n$.

Tablo důkaz z teorie

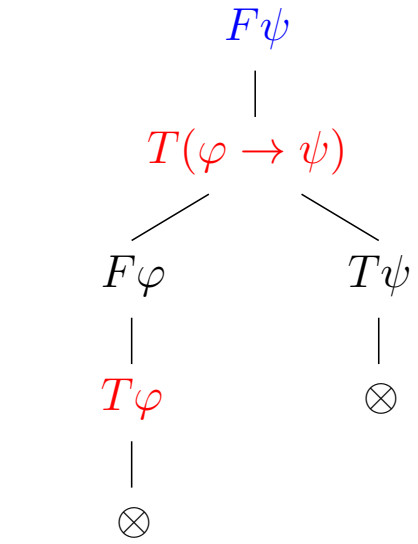
Nechť P je položka na větvi V tabla τ z teorie T. Řekneme, že

- položka P je *redukovaná* na V, pokud se na V vyskytuje jako kořen atomického tabla, tj. při konstrukci τ již došlo k jejímu rozvoji na V,
- větev V je *sporná*, obsahuje-li položky $T\varphi$ a $F\varphi$ pro nějakou formuli φ,
- větev V je *dokončená*, je-li sporná, nebo je každá její položka redukovaná na V a navíc obsahuje $T\varphi$ pro každé $\varphi \in T$,
- tablo τ je *dokončené*, pokud je každá jeho větev dokončená, a je *sporné*, pokud je každá jeho větev sporná.

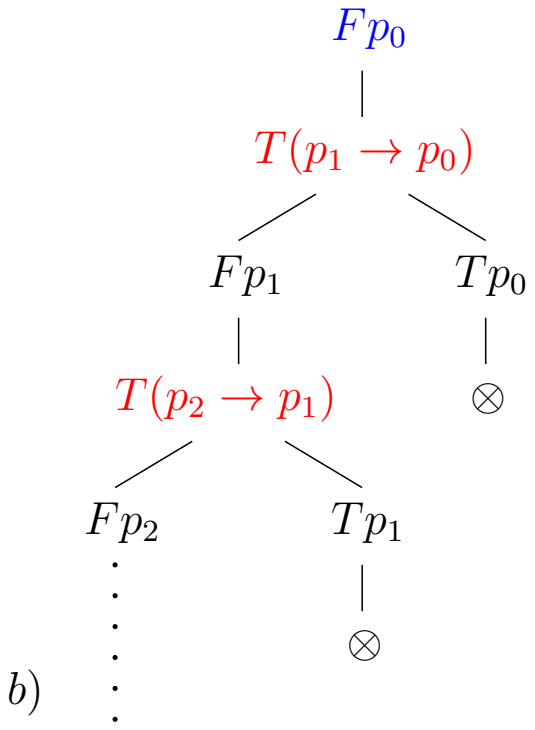
Tablo důkaz formule φ *z teorie* T je sporné tablo z T s $F\varphi$ v kořeni,
Má-li φ tablo důkaz z T, je *(tablo) dokazatelná z* T, píšeme $T \vdash \varphi$.

Zamítnutí formule φ *tablem z teorie* T je sporné tablo z T s $T\varphi$ v kořeni.
Formule φ je *(tablo) zamítnutelná* z T, má-li zamítnutí tablem z T, tj. $T \vdash \neg\varphi$.

Příklady tabla z teorie



$a)$



$b)$

a) Tablo důkaz formule ψ z teorie $T = \{\varphi, \varphi \to \psi\}$, tedy $T \vdash \psi$.

b) Dokončené tablo pro formuli p_0 z teorie $T = \{p_{n+1} \to p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Všechny větve jsou dokončené, nejlevější větev je bezesporná a nekonečná. Poskytuje (jediný) model teorie T, ve kterém p_0 neplatí.

Systematické tablo

Popíšeme systematickou konstrukci, jež povede vždy k dokončenému tablu.

Nechť R je položka a $T = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots\}$ je (konečná či nekonečná) teorie.

(1) Za τ_0 vezmi atomické tablo pro R. Dokud to lze, aplikuj následující kroky.

(2) Nechť P je nejlevější položka v co nejmenší úrovni již daného tabla τ_n, která není redukovaná na nějaké bezesporné větvi procházející skrze P.

(3) Za τ'_n vezmi tablo vzniklé z τ_n přidáním atomického tabla pro P na každou bezespornou větev skrze P. (Neexistuje-li P, vezmi $\tau'_n = \tau_n$.)

(4) Za τ_{n+1} vezmi tablo vzniklé z τ'_n přidáním $T\varphi_n$ na každou bezespornou větev neobsahující $T\varphi_n$. (Neexistuje-li φ_n, vezmi $\tau_{n+1} = \tau'_n$.)

Systematické tablo z teorie T pro položku R je výsledkem uvedené konstrukce, tj. $\tau = \cup\tau_n$.

Systematické tablo - dokončenost

Tvrzení *Pro každou teorii T a položku R je systematické tablo τ dokončené.*

Důkaz Nechť $\tau = \cup\tau_n$ je systematické tablo z $T = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots\}$ s R v kořeni.

- Je-li větev v τ bezesporná, je i každý její prefix v τ_n bezesporný.
- Je-li položka P neredukovaná na větvi v τ, je neredukovaná na každém jejím prefixu v τ_n (na němž leží).
- Do úrovně každé položky P (včetně její) je v τ jen konečně položek.
- Kdyby P byla neredukovaná na nějaké bezesporné větvi τ, přišla by na ní řada v nějakém kroku (2) a byla by zredukována krokem (3).
- Každá $\varphi_n \in T$ bude dle (4) nejpozději v τ_{n+1} na každé bezesporné větvi.
- Tedy systematické tablo τ obsahuje pouze dokončené větve. □

Konečnost důkazů

Tvrzení *Je-li $\tau = \cup \tau_n$ sporné tablo, je τ_n sporné konečné tablo pro nějaké n.*

Důkaz

- Nechť S je množina vrcholů stromu τ, jenž nad sebou neobsahují spor, tj. mezi předky nemají dvojici $T\varphi$, $F\varphi$ pro žádné φ.
- Kdyby S byla nekonečná, dle Königova lemmatu by podstrom τ na vrcholech S obsahoval nekonečnou větev, tedy by τ nebylo sporné tablo.
- Jelikož je S konečné, všechny vrcholy z S leží do úrovně m pro nějaké m.
- Tedy každý vrchol v úrovni $m + 1$ má nad sebou spor.
- Zvolme n takové, že τ_n se shoduje s τ do úrovně $m + 1$ včetně.
- Pak každá větev v τ_n je sporná. □

Důsledek *Je-li systematické tablo τ důkazem (z teorie T), je τ konečné.*

Důkaz Při jeho konstrukci se prodlužují jen bezesporné větve. □

Korektnost

Řekneme, že položka P se *shoduje* s ohodnocením v, pokud P je $T\varphi$ a $\overline{v}(\varphi) = 1$ nebo pokud P je $F\varphi$ a $\overline{v}(\varphi) = 0$. Větev V tabla se shoduje s v, shoduje-li se s v každá položka na V.

Lemma *Nechť v je model teorie T, který se shoduje s položkou v kořeni tabla $\tau = \cup\tau_n$ z T. Pak v tablu τ existuje větev shodující se s v.*

Důkaz Indukcí nalezneme posloupnost $V_0, V_1, \ldots$ takovou, že pro každé n je V_n větev v τ_n shodující se s v a V_n je obsažena ve V_{n+1}.

- Ověřením atomických tabel snadno zjistíme, že základ indukce platí.
- Pokud τ_{n+1} vznikne z τ_n bez prodloužení V_n, položme $V_{n+1} = V_n$.
- Vznikne-li τ_{n+1} z τ_n připojením $T\varphi$ k V_n pro nějaké $\varphi \in T$, nechť V_{n+1} je tato větev. Jelikož v je model φ, shoduje se V_{n+1} s v.
- Jinak τ_{n+1} vznikne z τ_n prodloužením V_n o atomické tablo nějaké položky P na V_n. Jelikož se P shoduje s v a tvrzení platí pro atomická tabla, lze požadovanou větev V_{n+1} v τ_{n+1} nalézt. □

Věta o korektnosti

Ukážeme, že tablo metoda ve výrokové logice je korektní.

Věta *Pro každou teorii T a formuli φ, je-li φ tablo dokazatelná z T, je φ pravdivá v T, tj. $T \vdash \varphi \;\Rightarrow\; T \models \varphi$.*

Důkaz

- Nechť φ je tablo dokazatelná z teorie T, tj. existuje sporné tablo τ s položkou $F\varphi$ v kořeni.
- Pro spor předpokládejme, že φ není pravdivá v T, tj. existuje model v teorie T, ve kterém φ neplatí (protipříklad).
- Jelikož se položka $F\varphi$ shoduje s v, dle předchozího lemmatu v tablu τ existuje větev shodující se s v.
- To ale není možné, neboť každá větev tabla τ je sporná, tj. obsahuje dvojici $T\psi$, $F\psi$ pro nějaké ψ. $\square$

Úplnost

Ukážeme, že bezesporná větev v dokončeném tablu poskytuje protipříklad.

Lemma *Nechť V je bezesporná větev dokončeného tabla τ. Pro následující ohodnocení v výrokových proměnných platí, že V se shoduje s v.*

$$v(p) = \begin{cases} 1 & \text{pokud se } Tp \text{ vyskytuje na } V \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Důkaz Indukcí dle struktury formule v položce vyskytující se na V.

- Je-li položka Tp na V, kde p je prvovýrok, je $\overline{v}(p) = 1$ dle definice v.
- Je-li položka Fp na V, není Tp na V, jinak by V byla sporná, tedy $\overline{v}(p) = 0$ dle definice v.
- Je-li $T(\varphi \wedge \psi)$ na V, je $T\varphi$ a $T\psi$ na V, neboť τ je dokončené. Dle indukčního předpokladu je $\overline{v}(\varphi) = \overline{v}(\psi) = 1$, tedy $\overline{v}(\varphi \wedge \psi) = 1$.
- Je-li $F(\varphi \wedge \psi)$ na V, je $F\varphi$ nebo $F\psi$ na V, neboť τ je dokončené. Dle indukčního předpokladu je $\overline{v}(\varphi) = 0$ nebo $\overline{v}(\psi) = 0$, tedy $\overline{v}(\varphi \wedge \psi) = 0$.
- Pro ostatní spojky obdobně jako v předchozích dvou případech. □

Věta o úplnosti

Ukážeme, že tablo metoda ve výrokové logice je i úplná.

Věta *Pro každou teorii T a formuli φ, je-li φ pravdivá v T, je φ tablo dokazatelná z T, tj. $T \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$.*

Důkaz Nechť φ je pravdivá v T. Ukážeme, že libovolné dokončené tablo (např. *systematické*) τ z teorie T s položkou $F\varphi$ v kořeni je sporné.

- Kdyby ne, nechť V je nějaká bezesporná větev tabla τ.
- Dle předchozího lemmatu existuje ohodnocení ν prvovýroků takové, že V se shoduje s ν, speciálně s $F\varphi$, tj. $\overline{\nu}(\varphi) = 0$.
- Jelikož větev V je dokončená, obsahuje $T\psi$ pro každé $\psi \in T$.
- Tedy ν je modelem teorie T (neboť větev V se shoduje s ν).
- To je ale ve sporu s tím, že φ platí v každém modelu teorie T.

Tedy tablo τ je důkazem φ z T. □

Vlastnosti teorií

Zavedeme syntaktické varianty již definovaných sémantických pojmů.

Nechť T je teorie nad $\mathbb{P}$. Je-li φ dokazatelná z T, řekneme, že φ je *věta* (*teorém*) teorie T. Množinu vět teorie T označme

$$\mathrm{Thm}^{\mathbb{P}}(T) = \{\varphi \in \mathrm{VF}_{\mathbb{P}} \mid T \vdash \varphi\}.$$

Řekneme, že teorie T je

- *sporná*, jestliže je v T dokazatelný $\bot$ (spor), jinak je *bezesporná*,
- *kompletní*, jestliže není sporná a každá formule je v ní dokazatelná či zamítnutelná, tj. $T \vdash \varphi$ či $T \vdash \neg\varphi$ pro každé $\varphi \in \mathrm{VF}_{\mathbb{P}}$,
- *extenze* teorie T' nad $\mathbb{P}'$, jestliže $\mathbb{P}' \subseteq \mathbb{P}$ a $\mathrm{Thm}^{\mathbb{P}'}(T') \subseteq \mathrm{Thm}^{\mathbb{P}}(T)$, o extenzi T teorie T' řekneme, že je *jednoduchá*, pokud $\mathbb{P} = \mathbb{P}'$, a *konzervativní*, pokud $\mathrm{Thm}^{\mathbb{P}'}(T') = \mathrm{Thm}^{\mathbb{P}}(T) \cap \mathrm{VF}_{\mathbb{P}'}$,
- *ekvivalentní* s teorií T', jestliže T je extenzí T' a T' je extenzí T.

Důsledky

Z korektnosti a úplnosti tablo metody vyplývá, že předchozí pojmy se shodují se svými sémantickými variantami.

Důsledek *Pro každou teorii T a formule φ, ψ nad $\mathbb{P}$,*

- $T \vdash \varphi$ *právě když* $T \models \varphi$,
- $\mathrm{Thm}^{\mathbb{P}}(T) = \theta^{\mathbb{P}}(T)$,
- T *je sporná, právě když není splnitelná, tj. nemá model,*
- T *je kompletní, právě když je sémanticky kompletní, tj. má právě jeden model,*
- $T, \varphi \vdash \psi$ *právě když* $T \vdash \varphi \to \psi$ *(Věta o dedukci).*

Poznámka Větu o dedukci lze dokázat přímo, transformací příslušných tabel.

Věta o kompaktnosti

Věta *Teorie má model, právě když každá její konečná část má model.*

Důkaz 1 Implikace zleva doprava je zřejmá. Pokud teorie T nemá model, je sporná, tj. je z ní dokazatelný $\bot$ systematickým tablem τ. Jelikož je τ konečné, je $\bot$ dokazatelný z nějaké konečné $T' \subseteq T$, tj. T' nemá model. □

Poznámka *Tento důkaz je založen na konečnosti důkazu, korektnosti a úplnosti. Uveďme ještě druhý, přímý důkaz (pomocí Königova lemmatu).*

Důkaz 2 Nechť $T = \{\varphi_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Uvažme strom S na konečných binárních posloupnostech σ uspořádaných prodloužením. Přičemž $\sigma \in S$, právě když existuje ohodnocení v prodlužující σ takové, že $v \models \varphi_i$ pro každé $i \leq \mathrm{lth}(\sigma)$.

Pozorování *S má nekonečnou větev, právě když T má model.*

Jelikož $\{\varphi_i \mid i \in n\} \subseteq T$ má model pro každé $n \in \mathbb{N}$, bude každá úroveň v S neprázdná. Tedy S je nekonečný, navíc binární, a dle Königova lemmatu obsahuje nekonečnou větev. □

Aplikace kompaktnosti

Graf (V, E) je *k-obarvitelný*, pokud existuje $c\colon V \to k$ takové, že $c(u) \neq c(v)$ pro každou hranu $\{u, v\} \in E$.

Věta *Spočetně nekonečný graf $G = (V, E)$ je k-obarvitelný, právě když každý jeho konečný podgraf je k-obarvitelný.*

Důkaz Implikace zleva doprava je zřejmá. Nechť každý konečný podgraf v G je k-obarvitelný. Vezměme $\mathbb{P} = \{p_{u,i} \mid u \in V, i \in k\}$ a teorii T s axiomy

$$p_{u,0} \vee \cdots \vee p_{u,k-1} \qquad \text{pro všechna } u \in V,$$
$$\neg(p_{u,i} \wedge p_{u,j}) \qquad \text{pro všechna } u \in V, i < j < k,$$
$$\neg(p_{u,i} \wedge p_{v,i}) \qquad \text{pro všechna } \{u, v\} \in E, i < k.$$

Platí, že G je k-obarvitelný, právě když T má model. Dle věty o kompaktnosti stačí dokázat, že každá konečná $T' \subseteq T$ má model. Nechť G' je podgraf na vrcholech u takových, že $p_{u,i}$ se vyskytuje v T' pro nějaké i. Jelikož G' je k-obarvitelný dle předpokladu, má T' model. □

Hilbertovský kalkul

- základní logické spojky: $\neg$, $\rightarrow$ (ostatní z nich odvozené)
- *logické axiomy* (schémata logických axiomů):

$$(i) \quad \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$
$$(ii) \quad (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$
$$(iii) \quad (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

  kde φ, ψ, χ jsou libovolné formule (daného jazyka).

- *odvozovací pravidlo*:

$$\frac{\varphi,\ \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$$ (modus ponens)

Důkaz (*Hilbertova stylu*) formule φ v teorii T je konečná posloupnost $\varphi_0, \ldots, \varphi_n = \varphi$ formulí taková, že pro každé $i \leq n$

- φ_i je logický axiom nebo $\varphi_i \in T$ (axiom teorie), nebo
- φ_i lze odvodit z předchozích formulí pomocí odvozovacího pravidla.

Poznámka *Volba axiomů a odvozovacích pravidel se v může v různých dokazovacích systémech Hilbertova stylu lišit.*

Příklad a korektnost

Formule φ je *dokazatelná* v T, má-li důkaz z T, značíme $T \vdash_H \varphi$.

Je-li $T = \emptyset$, značíme $\vdash_H \varphi$. Např. pro $T = \{\neg\varphi\}$ je $T \vdash_H \varphi \to \psi$ pro každé ψ.

1)	$\neg\varphi$	axiom z T
2)	$\neg\varphi \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$	logický axiom (i)
3)	$\neg\psi \to \neg\varphi$	modus ponens z 1), 2)
4)	$(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$	logický axiom (iii)
5)	$\varphi \to \psi$	modus ponens z 3), 4)

Věta *Pro každou teorii T a formuli φ, $T \vdash_H \varphi \Rightarrow T \models \varphi$.*

Důkaz

- Je-li $\varphi \in T$ nebo logický axiom, je $T \models \varphi$ (logické axiomy jsou tautologie),
- jestliže $T \models \varphi$ a $T \models \varphi \to \psi$, pak $T \models \psi$, tj. modus ponens je korektní,
- tedy každá formule vyskytující se v důkazu z T platí v T. □

Poznámka *Platí i úplnost, tj. $T \models \varphi \Rightarrow T \vdash_H \varphi$ pro každou teorii T a formuli φ.*

Výroková a predikátová logika - V

Petr Gregor

KTIML MFF UK

ZS 2016/2017

Rezoluční metoda - úvod

Hlavní rysy rezoluční metody (*neformálně*)

- je základem mnoha různých systémů, např. interpret Prologu, SAT řešiče, systémy pro automatické dokazování / verifikování, . . .
- předpokládá formule v CNF (převod obecně *“drahý”*),
- pracuje s množinovou reprezentací formulí,
- má jediné odvozovací pravidlo, tzv. rezoluční pravidlo,
- nemá žádné explicitní axiomy (či atomická tabla), ale jisté axiomy jsou skryty *“uvnitř”*,
- obdobně jako u tablo metody, jde o *zamítací* proceduru, tj. snaží se ukázat, že daná fomule (či teorie) je nesplnitelná,
- má různé varianty lišící se např. podmínkami pro použití rezolučního pravidla.

Množinová reprezentace (formulí v CNF)

- *Literál* l je výroková proměnná nebo její negace. $\bar{l}$ značí *opačný* literál k l.
- *Klauzule* C je konečná množina literálů (*"tvořících disjukci"*). Prázdná klauzule se značí $\square$, není nikdy splněna (neobsahuje splněný literál).
- *Formule* S je množina (i nekonečná) klauzulí (*"tvořících konjunkci"*). Prázdná formule $\emptyset$ je vždy splněna (neobsahuje nesplněnou klauzuli). Nekonečné formule reprezentují nekonečné teorie (konjunkcí axiomů).
- (*Částečné*) *ohodnocení* $\mathcal{V}$ je libovolná konzistentní množina literálů, tj. neobsahující dvojici opačných literálů. Ohodnocení $\mathcal{V}$ je *totální*, obsahuje-li pozitivní či negativní literál od každé výrokové proměnné.
- $\mathcal{V}$ *splňuje* S, značíme $\mathcal{V} \models S$, pokud $C \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ pro každé $C \in S$.

Např. $((\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee \neg s) \wedge (\neg t \vee s) \wedge s)$ reprezentujeme

$$S = \{\{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg q, r\}, \{\neg r, \neg s\}, \{\neg t, s\}, \{s\}\} \quad \text{a}$$

$$\mathcal{V} \models S \quad \text{pro} \quad \mathcal{V} = \{s, \neg r, \neg p\}$$

Rezoluční pravidlo

Nechť C_1, C_2 jsou klauzule a $l \in C_1$, $\bar{l} \in C_2$ pro nějaký literál l. Pak z C_1 a C_2 odvoď přes literál l klauzuli C, zvanou *rezolventa*, kde

$$C = (C_1 \setminus \{l\}) \cup (C_2 \setminus \{\bar{l}\}).$$

Ekvivalentně zapsáno, označíme-li $\sqcup$ disjunktní sjednocení,

$$\frac{C_1' \sqcup \{l\}, C_2' \sqcup \{\bar{l}\}}{C_1' \cup C_2'}$$

Např. z $\{p, q, r\}$ a $\{\neg p, \neg q\}$ lze odvodit $\{q, \neg q, r\}$ nebo $\{p, \neg p, r\}$.

Pozorování *Rezoluční pravidlo je korektní, tj. pro libovolné ohodnocení $\mathcal{V}$,*

$$\mathcal{V} \models C_1 \text{ a } \mathcal{V} \models C_2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{V} \models C.$$

Poznámka *Rezoluční pravidlo je speciální případ pravidla řezu*

$$\frac{\varphi \vee \psi, \ \neg\varphi \vee \chi}{\psi \vee \chi}$$

kde φ, ψ, χ jsou libovolné formule.

Rezoluční důkaz

- *rezoluční důkaz* (*odvození*) klauzule C z formule S je konečná posloupnost $C_0, \ldots, C_n = C$ taková, že pro každé $i \leq n$ je $C_i \in S$ nebo je C_i rezolventou nějakých dvou předchozích klauzulí (i stejných),
- klauzule C je (rezolucí) *dokazatelná* z S, psáno $S \vdash_R C$, pokud má rezoluční důkaz z S,
- *zamítnutí* formule S je rezoluční důkaz $\square$ z S,
- S je (rezolucí) *zamítnutelná*, pokud $S \vdash_R \square$.

Věta (korektnost) *Je-li S rezolucí zamítnutelná, je S nesplnitelná.*

Důkaz Nechť $S \vdash_R \square$. Kdyby $\mathcal{V} \models S$ pro nějaké ohodnocení $\mathcal{V}$, z korektnosti rezolučního pravidla by platilo i $\mathcal{V} \models \square$, což není možné. ■

Rezoluční strom a uzávěr

Rezoluční strom klauzule C z formule S je konečný binární strom s vrcholy označenými klauzulemi takový, že

(i) kořen je označen C,

(ii) listy jsou označeny klauzulemi z S,

(iii) každý vnitřní vrchol je označen rezolventou z klauzulí v jeho synech.

Pozorování *C má rezoluční strom z S právě když $S \vdash_R C$.*

Rezoluční uzávěr $\mathcal{R}(S)$ formule S je nejmenší induktivní množina definovaná

(i) $C \in \mathcal{R}(S)$ pro každé $C \in S$,

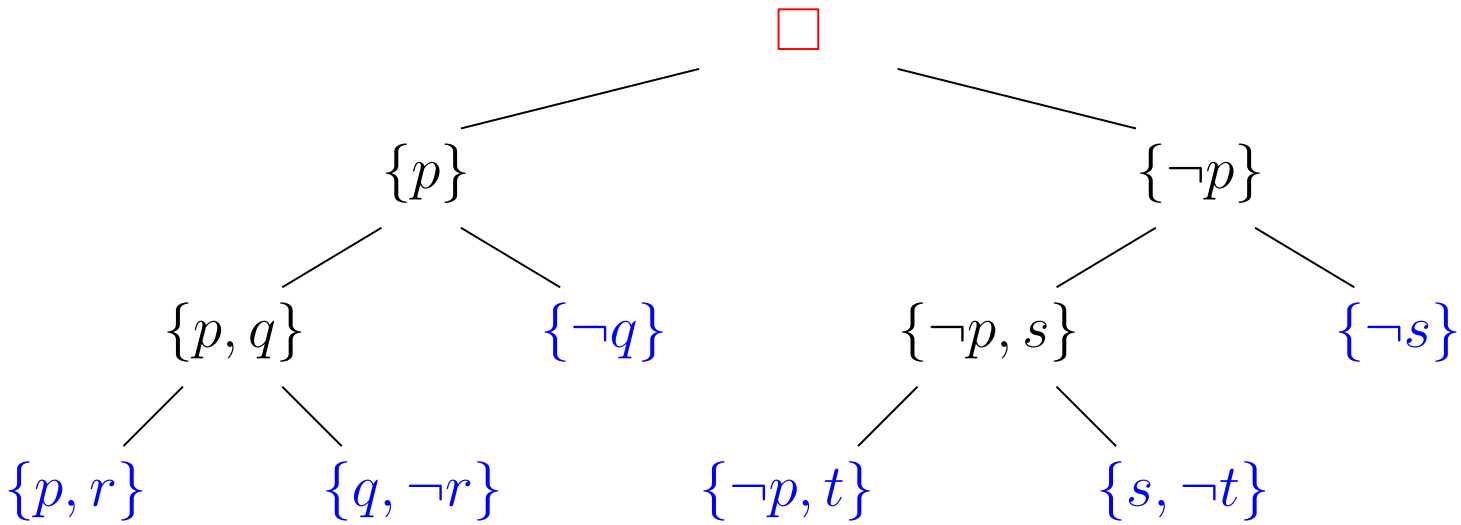
(ii) jsou-li $C_1, C_2 \in \mathcal{R}(S)$ a C je rezolventa C_1, C_2, je zároveň $C \in \mathcal{R}(S)$.

Pozorování *$C \in \mathcal{R}(S)$ právě když $S \vdash_R C$.*

Poznámka *Všechny pojmy o rezolučních důkazech lze tedy ekvivalentně zavést pomocí rezolučních stromů či uzávěrů.*

Příklad

Formule $((p \vee r) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (\neg q) \wedge (\neg p \vee t) \wedge (\neg s) \wedge (s \vee \neg t))$ je nesplnitelná, neboť pro $S = \{\{p, r\}, \{q, \neg r\}, \{\neg q\}, \{\neg p, t\}, \{\neg s\}, \{s, \neg t\}\}$ je $S \vdash_R \square$.



Rezoluční uzávěr S je

$$\mathcal{R}(S) = \{\{p, r\}, \{q, \neg r\}, \{\neg q\}, \{\neg p, t\}, \{\neg s\}, \{s, \neg t\}, \{p, q\}, \{\neg r\}, \{r, t\}, \{q, t\}, \{\neg t\}, \{\neg p, s\}, \{r, s\}, \{t\}, \{q\}, \{q, s\}, \square, \{\neg p\}, \{p\}, \{r\}, \{s\}\}.$$

Redukce dosazením

Nechť S je formule a l je literál. Označme

$$S^l = \{C \setminus \{\bar{l}\} \mid l \notin C \in S\}.$$

Pozorování

- S^l je ekvivalentní formuli, jež vznikne dosazením konstanty $\top$ (true, 1) za literály l a konstanty $\bot$ (false, 0) za literály $\bar{l}$ ve formuli S,
- S^l neobsahuje v žádné klauzuli literál l ani $\bar{l}$,
- jestliže $\{\bar{l}\} \in S$, pak $\square \in S^l$.

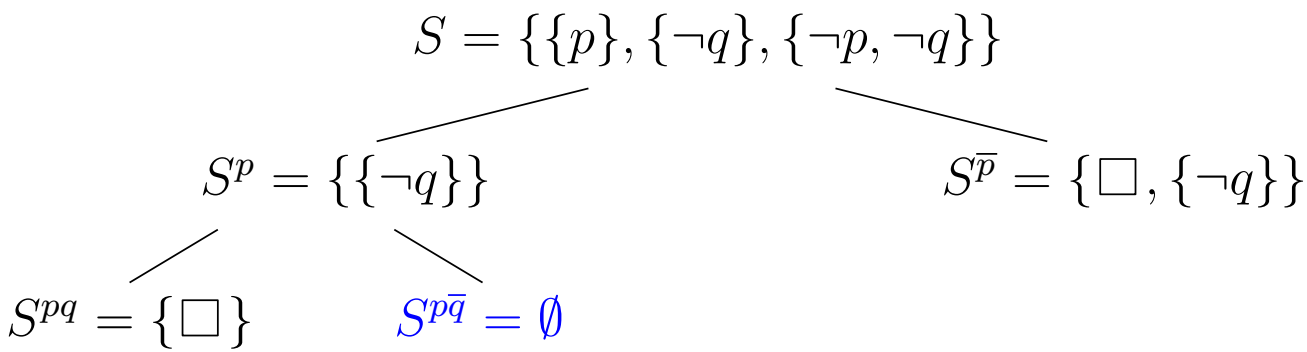
Lemma *S je splnitelná, právě když S^l nebo $S^{\bar{l}}$ je splnitelná.*

Důkaz ($\Rightarrow$) Nechť $\mathcal{V} \models S$ pro nějaké $\mathcal{V}$ a předpokládejme (búno), že $\bar{l} \notin \mathcal{V}$.

- Pak $\mathcal{V} \models S^l$, neboť pro $l \notin C \in S$ je $\mathcal{V} \setminus \{l, \bar{l}\} \models C$ a tudíž $\mathcal{V} \models C \setminus \{\bar{l}\}$.
- Naopak ($\Leftarrow$) předpokládejme (búno), že $\mathcal{V} \models S^l$ pro nějaké $\mathcal{V}$.
- Jelikož se l ani $\bar{l}$ nevyskytuje v S^l, je i $\mathcal{V}' \models S^l$ pro $\mathcal{V}' = (\mathcal{V} \setminus \{\bar{l}\}) \cup \{l\}$.
- Pak $\mathcal{V}' \models S$, neboť pro $C \in S$ obsahující l máme $l \in \mathcal{V}'$ a pro $C \in S$ neobsahující l je $\mathcal{V}' \models (C \setminus \{\bar{l}\}) \in S^l$. ■

Strom dosazení

Postupnou redukci literálů dosazením lze reprezentovat binárním stromem.



Důsledek *S není splnitelná, právě když každá větev obsahuje $\square$.*

Poznámka *Jelikož S může být nekonečná nad spočetným jazykem, strom může být nekonečný. Je-li ale S nesplnitelná, dle věty o kompaktnosti existuje konečná část $S' \subseteq S$, která je nesplnitelná. Pak po redukci všech literálů vyskytujících se v S' bude $\square$ v každé větvi po konečně mnoha krocích.*

Úplnost rezoluce

Věta *Je-li konečná S nesplnitelná, je rezolucí zamítnutelná, tj. $S \vdash_R \square$.*

Důkaz Indukcí dle počtu proměnných v S ukážeme, že $S \vdash_R \square$.

- Nemá-li nesplnitelná S žádnou proměnnou, je $S = \{\square\}$ a tedy $S \vdash_R \square$,
- Nechť l je literál vyskytující se v S. Dle lemmatu, S^l a $S^{\bar{l}}$ jsou nesplnitelné.
- Jelikož S^l a $S^{\bar{l}}$ mají méně proměnných než S, dle indukčního předpokladu existují rezoluční stromy T^l a $T^{\bar{l}}$ pro odvození $\square$ z S^l resp. $S^{\bar{l}}$.
- Je-li každý list T^l z S, je T^l rezolučním stromem $\square$ z S, tj. $S \vdash_R \square$.
- Pokud ne, doplněním literálu $\bar{l}$ do každého listu, jenž není z S, (a do všech vrcholů nad ním) získáme rezoluční strom $\{\bar{l}\}$ z S.
- Obdobně získáme rezoluční strom $\{l\}$ z S doplněním l ve stromu $T^{\bar{l}}$,
- Rezolucí jejich kořenů $\{\bar{l}\}$ a $\{l\}$ získáme rezoluční strom $\square$ z S. ■

Důsledek *Je-li S nesplnitelná, je rezolucí zamítnutelná, tj. $S \vdash_R \square$.*

Důkaz Plyne z předchozího užitím věty o kompaktnosti.

Lineární rezoluce - úvod

Rezoluční metodu můžeme značně omezit (bez ztráty úplnosti).

- *Lineární důkaz* (rezolucí) klauzule C z formule S je konečná posloupnost dvojic $(C_0, B_0), \ldots, (C_n, B_n)$ taková, že $C_0 \in S$ a pro každé $i \leq n$

  i) $B_i \in S$ nebo $B_i = C_j$ pro nějaké $j < i$, a

  ii) C_{i+1} je rezolventa C_i a B_i, kde $C_{n+1} = C$.

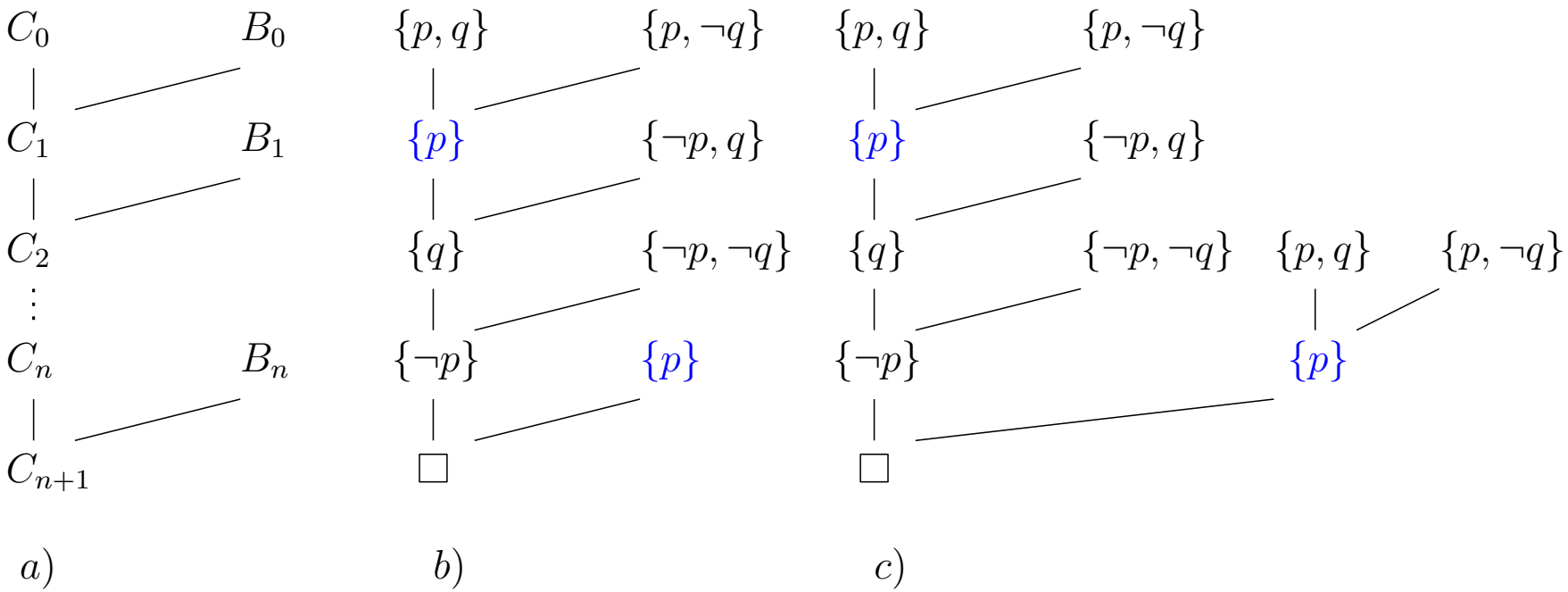
- C_0 zveme *počáteční* klauzule, C_i *centrální* klauzule, B_i *boční* klauzule.
- C je *lineárně dokazatelná* z S, psáno $S \vdash_L C$, má-li lineární důkaz z S.
- *Lineární zamítnutí* S je lineární důkaz $\square$ z S.
- S je *lineárně zamítnutelná*, pokud $S \vdash_L \square$.

Pozorování *Je-li S lineárně zamítnutelná, je S nesplnitelná.*

Důkaz Každý lineární důkaz lze transformovat na (korektní) rezoluční důkaz.

Poznámka *Platí i úplnost, tj. je-li S nesplnitelná, je S lineárně zamítnutelná.*

Příklad lineární rezoluce



$a)$ obecný tvar lineární rezoluce,

$b)$ pro $S = \{\{p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$ je $S \vdash_L \square$,

$c)$ transformace lineárního důkazu na rezoluční důkaz.

LI-rezoluce

Pro Hornovy formule můžeme lineární rezoluci dál omezit.

- *Hornova formule* je množina (i nekonečná) Hornových klauzulí.
- *Hornova klauzule* je klauzule obsahující nejvýše jeden pozitivní literál.
- *Fakt* je (Hornova) klauzule $\{p\}$, kde p je pozitivní literál.
- *Pravidlo* je (Hornova) klauzule s právě jedním pozitivním a aspoň jedním negativním literálem. Pravidla a fakta jsou *programové klauzule*.
- *Cíl* je neprázdná (Hornova) klauzule bez pozitivního literálu.

Pozorování *Je-li Hornova formule S nesplnitelná a $\square \notin S$, obsahuje fakt i cíl.*

Důkaz Neobsahuje-li fakt (cíl), je splnitelná nastavením všech proměnných na 0 (resp. na 1). ■

LI-rezoluce (linear input) z formule S je lineární rezoluce z S, ve které je každá boční klauzule B_i ze (vstupní) formule S.

Je-li klauzule C dokazatelná LI-rezolucí z S, píšeme $S \vdash_{LI} C$.

Úplnost LI-rezoluce pro Hornovy formule

Věta *Je-li Hornova T splnitelná a $T \cup \{G\}$ nesplnitelná pro cíl G, lze $\square$ odvodit LI-rezolucí z $T \cup \{G\}$ začínající G.*

Důkaz Dle věty o kompaktnosti můžeme předpokládat, že T je konečná.

- Postupujeme indukcí dle počtu proměnných v T.
- Dle pozorování, T obsahuje fakt $\{p\}$ pro nějakou proměnnou p.
- Dle lemmatu je $T' = (T \cup \{G\})^p = T^p \cup \{G^p\}$ nesplnitelná, přičemž $G^p = G \setminus \{\overline{p}\}$.
- Je-li $G^p = \square$, je $G = \{\overline{p}\}$ a tedy $\square$ je rezolventa G a $\{p\} \in T$.
- Jinak, jelikož T^p je splnitelná (stejným ohodnocením, které splňuje T) a má méně proměnných, dle indukčního předpokladu lze $\square$ odvodit LI-rezolucí z T' začínající G^p.
- Doplněním literálu $\overline{p}$ do všech listů, jež nejsou v $T \cup \{G\}$, a všech vrcholů pod ním získáme LI-odvození $\{\overline{p}\}$ z $T \cup \{G\}$ začínající v G.
- Závěrečnou rezolucí pomocí faktu $\{p\} \in T$ získáme $\square$. ■

Příklad LI-rezoluce

$T = \{\{p, \neg r, \neg s\}, \{r, \neg q\}, \{q, \neg s\}, \{s\}\}, \quad G = \{\neg p, \neg q\}$

$T^s = \{\{p, \neg r\}, \{r, \neg q\}, \{q\}\}$

$T^{sq} = \{\{p, \neg r\}, \{r\}\}$

$T^{sqr} = \{\{p\}\}$

$G^{sqr} = \{\neg p\} \quad \{p\}$

$G^{sqrp} = \square$

$G^{sq} = \{\neg p\} \quad \{p, \neg r\}$

$\{\neg r\} \quad \{r\}$

$\square$

$G^s = \{\neg p, \neg q\} \quad \{p, \neg r\}$

$\{\neg q, \neg r\} \quad \{r, \neg q\}$

$\{\neg q\} \quad \{q\}$

$\square$

$G = \{\neg p, \neg q\} \quad \{p, \neg r, \neg s\}$

$\{\neg q, \neg r, \neg s\} \quad \{r, \neg q\}$

$\{\neg q, \neg s\} \quad \{q, \neg s\}$

$\{\neg s\} \quad \{s\}$

$\square$

$T^{sqr}, G^{sqr} \vdash_{LI} \square \qquad T^{sq}, G^{sq} \vdash_{LI} \square \qquad T^s, G^s \vdash_{LI} \square \qquad T, G \vdash_{LI} \square$

Program v Prologu

(Výrokový) *program* (v Prologu) je Hornova formule obsahující pouze programové klauzule, tj. fakta nebo pravidla.

pravidlo	$p :- q, r.$	$q \wedge r \to p$	$\{p, \neg q, \neg r\}$	
	$p :- s.$	$s \to p$	$\{p, \neg s\}$	
	$q :- s.$	$s \to q$	$\{q, \neg s\}$	
fakt	$r.$	r	$\{r\}$	
	$s.$	s	$\{s\}$	*program*
dotaz	$?- p, q.$		$\{\neg p, \neg q\}$	*cíl*

Zajímá nás, zda daný dotaz vyplývá z daného programu.

Důsledek *Pro každý program P a dotaz $(p_1 \wedge \ldots \wedge p_n)$ je ekvivalentní, zda*

(1) $P \models p_1 \wedge \ldots \wedge p_n$,

(2) $P \cup \{\neg p_1, \ldots, \neg p_n\}$ je nesplnitelná,

(3) $\square$ lze odvodit LI-rezolucí z $P \cup \{G\}$ začínající cílem $G = \{\neg p_1, \ldots, \neg p_n\}$.

Rezoluce v Prologu

1) S klauzulemi interpret pracuje jako s uspořádanými seznamy literálů.

LD-rezoluce (*linear definite*) je LI-rezoluce, při které v každém kroku rezolventa aktuálního cíle $(\neg p_1, \ldots, \neg p_{i-1}, \neg p_i, \neg p_{i+1}, \ldots, \neg p_n)$ a boční klauzule $(p_i, \neg q_1, \ldots, \neg q_m)$ je $(\neg p_1, \ldots, \neg p_{i-1}, \neg q_1, \ldots, \neg q_m, \neg p_{i+1}, \ldots, \neg p_n)$.

Pozorování *Každý LI-důkaz lze transformovat na LD-důkaz stejné klauzule ze stejné formule se stejnou počáteční klauzulí (cílem).*

2) Výběr literálu z cílové klauzule, přes který se rezolvuje, je určen daným selekčním pravidlem $\mathcal{R}$. Typicky, "vyber první literál z aktuálního cíle".

SLD-rezoluce (*selection*) dle $\mathcal{R}$ je LD-rezoluce, při které se v kroku (C_i, B_i) rezolvuje přes literál $\mathcal{R}(C_i)$.

Pozorování *Každý LD-důkaz lze transformovat na SLD-důkaz stejné klauzule ze stejné formule se stejnou počáteční klauzulí (cílem).*

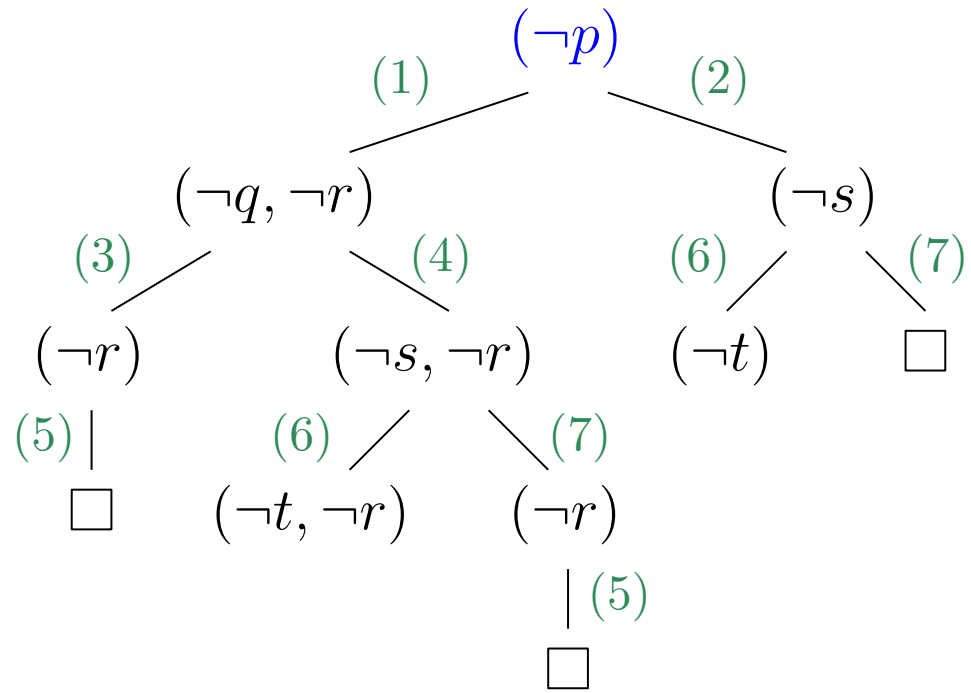
Důsledek *SLD-rezoluce je úplná pro dotazy nad programy v Prologu.*

Prohledávací SLD-strom

Dosud není určen výběr programové klauzule pro rezoluci s aktuálním cílem.

SLD-strom programu P a cíle G pro selekční pravidlo $\mathcal{R}$ je strom s vrcholy označenými cíly takový, že kořen je označen G a je-li nějaký vrchol označen G', má tolik synů, kolik je možností rezolucí G' s programovými klauzulemi v P dle literálu $\mathcal{R}(G')$. Synové jsou označeni příslušnými rezolventami.

$p :- q, r.$ (1)
$p :- s.$ (2)
$q.$ (3)
$q :- s.$ (4)
$r.$ (5)
$s :- t.$ (6)
$s.$ (7)
$?- p.$

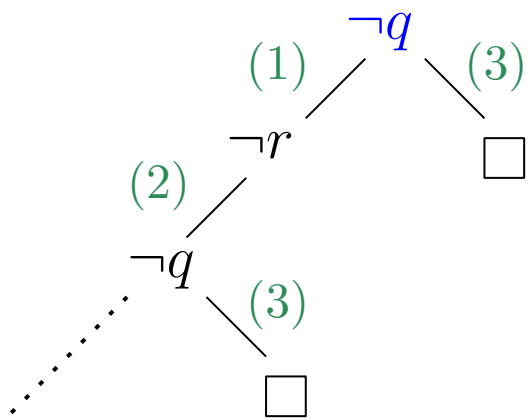


Závěrečné poznámky

- Interpret Prologu prochází SLD-strom, způsob není předepsán.
- Implementace, které používají DFS, nezachovávají úplnost.

$$q :- r. \quad (1)$$
$$r :- q. \quad (2)$$
$$q. \quad (3)$$

$$?- q.$$



- Jistou kontrolu nad prohledáváním poskytuje !, tzv. řez.
- Při povolení negace nastanou potíže se sémantikou programů.
- Síla rezoluční metody bude více patrná v predikátové logice.

Výroková a predikátová logika - VI

Petr Gregor

KTIML MFF UK

ZS 2016/2017

Predikátová logika

Zabývá se tvrzeními o individuích, jejich vlastnostech a vztazích.

"Je inteligentní a její otec zná pana rektora." $I(x) \wedge Z(o(x), r)$

- x je proměnná, reprezentuje individuum,
- r je konstantní symbol, reprezentuje konkrétní individuum,
- o je funkční symbol, reprezentuje funkci,
- I, Z jsou relační (predikátové) symboly, reprezentují relace (vlastnost *"být inteligentní"* a vztah *"znát"*).

"Každý má otce." $(\forall x)(\exists y)(y = o(x))$

- $(\forall x)$ je všeobecný (univerzální) kvantifikátor (*každé* x),
- $(\exists y)$ je existenční kvantifikátor (*nějaké* y),
- $=$ je (binární) relační symbol, reprezentuje identickou relaci.

Jazyk

Jazyk 1. řádu obsahuje

- proměnné $x, y, z, \ldots, x_0, x_1, \ldots$ (spočetně mnoho),
  množinu všech proměnných značíme Var,
- funkční symboly $f, g, h, \ldots$, včetně konstantních symbolů $c, d, \ldots$,
  což jsou nulární funkční symboly,
- relační (predikátové) symboly $P, Q, R, \ldots$, případně symbol $=$ (rovnost)
  jako speciální relační symbol,
- kvantifikátory $(\forall x)$, $(\exists x)$ pro každou proměnnou $x \in \mathrm{Var}$,
- logické spojky $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
- závorky $($, $)$

Každý funkční i relační symbol S má danou *aritu* (*četnost*) $\mathrm{ar}(S) \in \mathbb{N}$.

Poznámka *Oproti výrokové logice nemáme (explicitně) výrokové proměnné, lze je zavést jako nulární relační symboly.*

Signatura jazyka

- *Logické symboly* jsou proměnné, kvantifikátory, logické spojky a závorky.
- *Mimologické symboly* jsou funkční a relační symboly kromě rovnosti. Rovnost (obvykle) uvažujeme zvlášť.
- *Signatura* je dvojice $\langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ disjunktních množin relačních a funkčních symbolů s danými aritami, přičemž žádný z nich není rovnost. Signatura určuje všechny mimologické symboly.
- *Jazyk* je dán signaturou $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ a uvedením, zda jde o jazyk s rovností či bez rovnosti. Jazyk musí obsahovat alespoň jeden relační symbol (mimologický nebo rovnost).

Poznámka *Význam symbolů není v jazyce určen, např. symbol* $+$ *nemusí reprezentovat standardní sčítání.*

Příklady jazyků

Jazyk obvykle uvádíme výčtem mimologických symbolů s případným upřesněním, zda jde o funkční či relační symboly a jakou mají aritu.

Následující příklady jazyků jsou všechny s rovností.

- $L = \langle\ \rangle$ je jazyk čisté rovnosti,
- $L = \langle c_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ je jazyk spočetně mnoha konstant,
- $L = \langle \leq \rangle$ je jazyk uspořádání,
- $L = \langle E \rangle$ je jazyk teorie grafů,
- $L = \langle +, -, 0 \rangle$ je jazyk teorie grup,
- $L = \langle +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ je jazyk teorie těles,
- $L = \langle -, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ je jazyk Booleových algeber,
- $L = \langle S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$ je jazyk aritmetiky,

kde c_i, 0, 1 jsou konstantní symboly, S, $-$ jsou unární funkční symboly, $+$, $\cdot$, $\wedge$, $\vee$ jsou binární funkční symboly, E, $\leq$ jsou binární relační symboly.

Termy

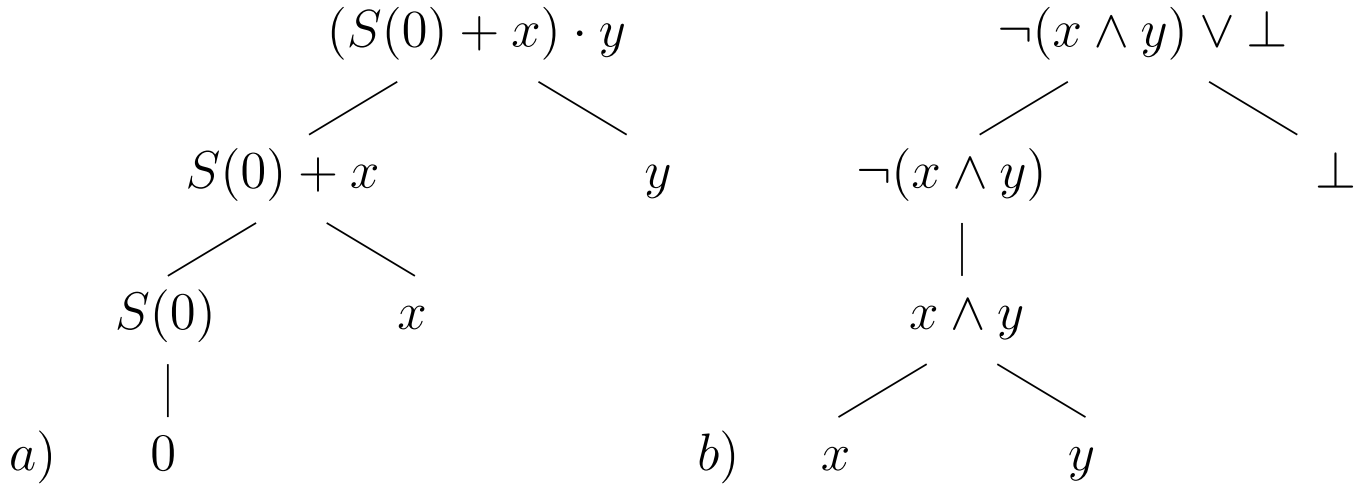
Jsou výrazy reprezentující hodnoty (složených) funkcí.

Termy jazyka L jsou dány induktivním předpisem

- (i) každá proměnná nebo konstantní symbol je term,
- (ii) je-li f funkční symbol jazyka L s aritou $n > 0$ a $t_0, \ldots, t_{n-1}$ jsou termy, pak je i výraz $f(t_0, \ldots, t_{n-1})$ term,
- (iii) každý term vznikne konečným užitím pravidel (i), (ii).

- *Konstantní term* je term bez proměnných.
- Množinu všech termů jazyka L značíme Term_L.
- Termu, jenž je součástí jiného termu t, říkáme *podterm* termu t.
- Strukturu termu můžeme reprezentovat jeho vytvořujícím stromem.
- U binárních funkčních symbolů často používáme infixního zápisu, např. píšeme $(x + y)$ namísto $+(x, y)$.

Příklady termů



a) Vytvořující strom termu $(S(0) + x) \cdot y$ jazyka aritmetiky.

b) Výrokové formule se spojkami $\neg$, $\wedge$, $\vee$, případně s konstantami $\top$, $\bot$ lze chápat jako termy jazyka Booleových algeber.

Atomické formule

Jsou nejjednodušší formule.

- *Atomická formule* jazyka L je výraz $R(t_0, \ldots, t_{n-1})$, kde R je n-ární relační symbol jazyka L a $t_0, \ldots, t_{n-1}$ jsou termy jazyka L.
- Množinu všech atomických formulí jazyka L značíme AFm_L.
- Strukturu atomické formule můžeme reprezentovat vytvořujícím stromem z vytvořujících podstromů jejích termů.
- U binárních relačních symbolů často používáme infixního zápisu, např. $t_1 = t_2$ namísto $=(t_1, t_2)$ či $t_1 \leq t_2$ namísto $\leq(t_1, t_2)$.
- *Příklady atomických formulí*

$$Z(o(x), r), \quad x \cdot y \leq (S(0) + x) \cdot y, \quad \neg(x \wedge y) \vee \bot = \bot.$$

Formule

Formule jazyka L jsou výrazy dané induktivním předpisem

(i) každá atomická formule jazyka L je formule,

(ii) jsou-li φ, ψ formule, pak i následující výrazy jsou formule

$$(\neg\varphi)\ ,(\varphi \wedge \psi)\ ,(\varphi \vee \psi)\ ,(\varphi \to \psi)\ ,(\varphi \leftrightarrow \psi),$$

(iii) je-li φ formule a x proměnná, jsou výrazy $((\forall x)\varphi)$ a $((\exists x)\varphi)$ formule.

(iv) každá formule vznikne konečným užitím pravidel (i), (ii), (iii).

- Množinu všech formulí jazyka L značíme Fm_L.
- Formuli, jež je součástí jiné formule φ, nazveme *podformule* formule φ.
- Strukturu formule můžeme reprezentovat jejím vytvořujícím stromem.

Konvence zápisu

- Zavedení *priorit* binárních funkčních symbolů např. $+$, $\cdot$ umožňuje při infixním zápisu vypouštět závorky okolo podtermu vzniklého symbolem vyšší priority, např. $x \cdot y + z$ reprezentuje term $(x \cdot y) + z$.
- Zavedení *priorit* logických spojek a kvantifikátorů umožňuje vypouštět závorky okolo podformule vzniklé spojkou s vyšší prioritou.

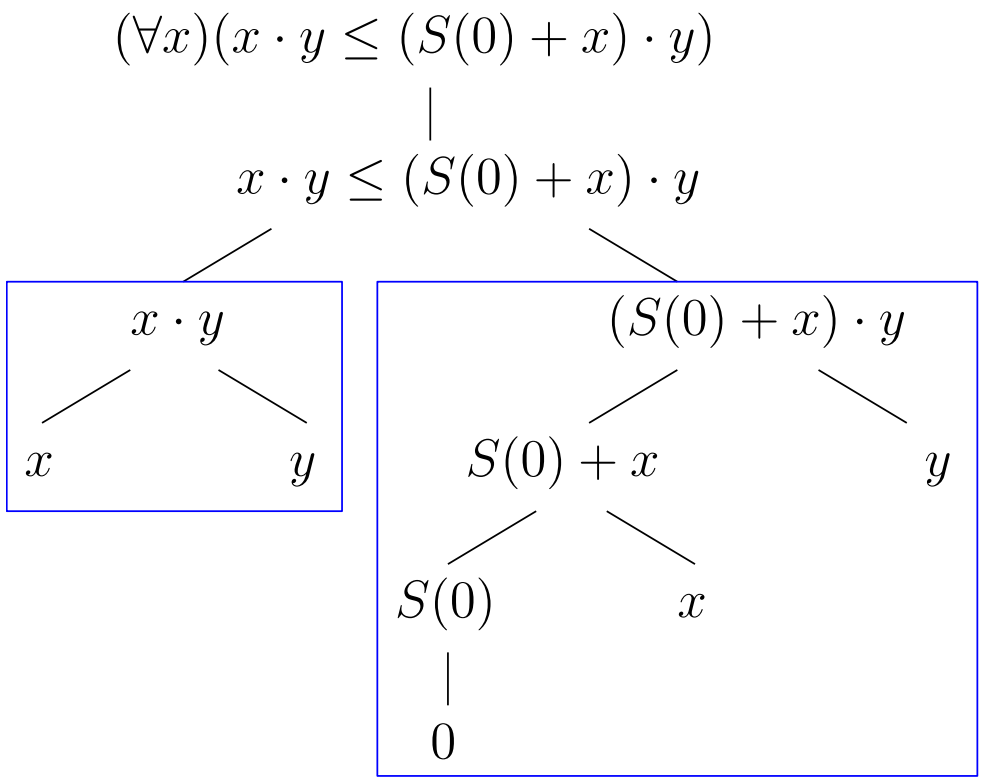
$$(1)\ \ \rightarrow,\ \leftrightarrow \qquad (2)\ \ \wedge,\ \vee \qquad (3)\ \ \neg,\ (\forall x),\ (\exists x)$$

- Okolo podformulí vzniklých $\neg$, $(\forall x)$, $(\exists x)$ lze závorky vypustit vždy.
- Můžeme vypustit závorky i okolo $(\forall x)$ a $(\exists x)$ pro každé $x \in \mathrm{Var}$.
- Rovněž vnější závorky můžeme vynechat.

$$(((\neg((\forall x)R(x))) \wedge ((\exists y)P(y))) \rightarrow (\neg(((\forall x)R(x)) \vee (\neg((\exists y)P(y))))))$$

$$\neg\forall xR(x) \wedge \exists yP(y) \rightarrow \neg(\forall xR(x) \vee \neg\exists yP(y))$$

Příklad formule



Vytvořující strom formule $(\forall x)(x \cdot y \leq (S(0) + x) \cdot y)$.

Výskyt proměnné

Nechť φ je formule a x je proměnná.

- *Výskyt* proměnné x ve φ je list vytvořujícího stromu φ označený x.
- Výskyt x ve φ je *vázaný*, je-li součástí nějaké podformule ψ začínající kvantifikátorem $(\forall x)$ nebo $(\exists x)$. Není-li výskyt vázaný, je *volný*.
- Proměnná x je *volná* ve φ, pokud má volný výskyt ve φ.
  Je *vázaná* ve φ, pokud má vázaný výskyt ve φ.
- Proměnná x může být zároveň volná i vázaná ve φ. Např. ve formuli
$$(\forall x)(\exists y)(x \leq y) \vee x \leq z.$$
- Zápis $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ značí, že $x_1, \ldots, x_n$ jsou všechny volné proměnné ve formuli φ. *(O nich formule φ něco tvrdí).*

Poznámka *Uvidíme, že pravdivostní hodnota formule (při dané interpretaci symbolů) závisí pouze na ohodnocení volných proměnných.*

Otevřené a uzavřené formule

- Formule je *otevřená*, neobsahuje-li žádný kvantifikátor. Pro množinu OFm_L všech otevřených formulí jazyka L platí $\mathrm{AFm}_L \subsetneq \mathrm{OFm}_L \subsetneq \mathrm{Fm}_L$.
- Formule je *uzavřená* (*sentence*), pokud nemá žádnou volnou proměnnou, tj. všechny výskyty proměnných jsou vázané.
- Formule může být otevřená i uzavřená zároveň, pak všechny její termy jsou konstantní.

$x + y \leq 0$	*otevřená*, $\varphi(x, y)$
$(\forall x)(\forall y)(x + y \leq 0)$	*uzavřená (sentence)*,
$(\forall x)(x + y \leq 0)$	*ani otevřená, ani uzavřená*, $\varphi(y)$
$1 + 0 \leq 0$	*otevřená i uzavřená*

Poznámka *Uvidíme, že sentence má při dané interpretaci symbolů pevný význam, tj. její pravdivostní hodnota nezávisí na ohodnocení proměnných.*

Instance

Když do formule za volnou proměnnou x dosadíme term t, požadujeme, aby vzniklá formule říkala (nově) o termu t "totéž", co předtím říkala o proměnné x.

$\varphi(x)$	$(\exists y)(x+y=1)$	"existuje prvek $1-x$"
pro $t=1$ lze $\varphi(x/t)$	$(\exists y)(1+y=1)$	"existuje prvek $1-1$"
pro $t=y$ nelze	$(\exists y)(y+y=1)$	"1 je dělitelné 2"

- Term t je *substituovatelný* za proměnnou x ve formuli φ, pokud po současném nahrazení všech volných výskytů x za t nevznikne ve φ žádný vázaný výskyt proměnné z t.
- Pak vzniklou formuli značíme $\varphi(x/t)$ a zveme ji *instance* formule φ vzniklá *substitucí* termu t za proměnnou x do φ.
- t není substituovatelný za x do φ, právě když x má volný výskyt v nějaké podformuli φ začínající $(\forall y)$ nebo $(\exists y)$ pro nějakou proměnnou y z t.
- Konstantní termy jsou substituovatelné vždy.

Varianty

Kvantifikované proměnné lze (za určitých podmínek) přejmenovat tak, že vznikne ekvivalentní formule.

Nechť $(Qx)\psi$ je podformule ve φ, kde Q značí $\forall$ či $\exists$, a y je proměnná, tž.

1) y je substituovatelná za x do ψ, a
2) y nemá volný výskyt v ψ.

Nahrazením podformule $(Qx)\psi$ za $(Qy)\psi(x/y)$ vznikne *varianta* formule φ *v podformuli* $(Qx)\psi$. Postupnou variací jedné či více podformulí ve φ vznikne *varianta* formule φ. *Např.*

$(\exists x)(\forall y)(x \leq y)$	*je formule* φ,
$(\exists u)(\forall v)(u \leq v)$	*je varianta* φ,
$(\exists y)(\forall y)(y \leq y)$	*není varianta* φ, *neplatí* 1),
$(\exists x)(\forall x)(x \leq x)$	*není varianta* φ, *neplatí* 2).

Struktury

- $\underline{S} = \langle S, \leq \rangle$ uspořádaná množina, kde $\leq$ je reflexivní, antisymetrická, tranzitivní binární relace na S,
- $G = \langle V, E \rangle$ neorientovaný graf bez smyček, kde V je množina *vrcholů*, E je ireflexivní, symetrická binární relace na V *(sousednost)*,
- $\underline{\mathbb{Z}_p} = \langle \mathbb{Z}_p, +, -, 0 \rangle$ grupa sčítání celých čísel modulo p,
- $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ těleso racionálních čísel.
- $\underline{\mathcal{P}(X)} = \langle \mathcal{P}(X), -, \cap, \cup, \emptyset, X \rangle$ potenční algebra nad množinou X,
- $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$ standardní model aritmetiky (přirozených čísel),
- konečné automaty a další modely výpočtu,
- relační databáze, ...

Struktura pro jazyk

Nechť $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ je jazyk a A je neprázdná množina.

- *Realizace* (*interpretace*) *relačního symbolu* $R \in \mathcal{R}$ na A je libovolná relace $R^A \subseteq A^{\mathrm{ar}(R)}$. Realizace rovnosti na A je relace Id_A (identita).
- *Realizace* (*interpretace*) *funkčního symbolu* $f \in \mathcal{F}$ na A je libovolná funkce $f^A \colon A^{\mathrm{ar}(f)} \to A$. Realizace konstantního symbolu je tedy prvek z A.

Struktura pro jazyk L (*L-struktura*) je trojice $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^A, \mathcal{F}^A \rangle$, kde

- A je neprázdná množina, zvaná *doména* (*univerzum*) struktury $\mathcal{A}$,
- $\mathcal{R}^A = \langle R^A \mid R \in \mathcal{R} \rangle$ je soubor realizací relačních symbolů (relací),
- $\mathcal{F}^A = \langle f^A \mid f \in \mathcal{F} \rangle$ je soubor realizací funkčních symbolů (funkcí).

Strukturu pro jazyk L nazýváme také *model jazyka* L. Třída všech modelů jazyka L se značí $M(L)$. *Např. struktury pro jazyk* $L = \langle \leq \rangle$ *jsou*

$$\langle \mathbb{N}, \leq \rangle,\ \langle \mathbb{Q}, > \rangle,\ \langle X, E \rangle,\ \langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle \text{ pokud } X \neq \emptyset.$$

Hodnota termu

Nechť t je term jazyka $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ a $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^A, \mathcal{F}^A \rangle$ je struktura pro L.

- *Ohodnocení proměnných* v množině A je funkce $e\colon \mathrm{Var} \to A$.
- *Hodnota* $t^A[e]$ termu t ve struktuře $\mathcal{A}$ při ohodnocení e je daná předpisem

$$x^A[e] = e(x) \quad \text{pro každé } x \in \mathrm{Var},$$
$$(f(t_0, \ldots, t_{n-1}))^A[e] = f^A(t_0^A[e], \ldots, t_{n-1}^A[e]) \quad \text{pro každé } f \in \mathcal{F}.$$

- Speciálně, pro konstantní symbol c je $c^A[e] = c^A$.
- Je-li t konstantní term, jeho hodnota v $\mathcal{A}$ nezávisí na ohodnocení e.
- Hodnota termu v $\mathcal{A}$ závisí pouze na ohodnocení jeho proměnných.

Např. hodnota termu $x + 1$ *ve struktuře* $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, +, 1 \rangle$ *při ohodnocení* e *s* $e(x) = 2$ *je* $(x + 1)^N[e] = 3$.

Hodnota atomické formule

Nechť φ je atomická formule tvaru $R(t_0, \ldots, t_{n-1})$ jazyka $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ a $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^A, \mathcal{F}^A \rangle$ je struktura pro L.

- *Hodnota* $H^A_{at}(\varphi)[e]$ formule φ ve struktuře $\mathcal{A}$ při ohodnocení e je

$$H^A_{at}(R(t_0, \ldots, t_{n-1}))[e] = \begin{cases} 1 & \text{pokud } (t_0^A[e], \ldots, t_{n-1}^A[e]) \in R^A, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

  přičemž $=^A$ je Id_A, tj. $H^A_{at}(t_0 = t_1)[e] = 1$ pokud $t_0^A[e] = t_1^A[e]$, jinak 0.

- Je-li φ sentence, tj. všechny její termy jsou konstantní, její hodnota v $\mathcal{A}$ nezávisí na ohodnocení e.
- Hodnota φ v $\mathcal{A}$ závisí pouze na ohodnocení jejích (volných) proměnných.

Např. hodnota formule φ tvaru $x + 1 \leq 1$ ve struktuře $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, +, 1, \leq \rangle$ při ohodnocení e je $H^N_{at}(\varphi)[e] = 1$ právě když $e(x) = 0$.

Hodnota formule

Hodnota $H^A(\varphi)[e]$ formule φ ve struktuře $\mathcal{A}$ při ohodnocení e je

$$
\begin{aligned}
H^A(\varphi)[e] &= H^A_{at}(\varphi)[e] \quad \text{pokud } \varphi \text{ je atomická,} \\
H^A(\neg\varphi)[e] &= -_1(H^A(\varphi)[e]) \\
H^A(\varphi \wedge \psi)[e] &= \wedge_1(H^A(\varphi)[e], H^A(\psi)[e]) \\
H^A(\varphi \vee \psi)[e] &= \vee_1(H^A(\varphi)[e], H^A(\psi)[e]) \\
H^A(\varphi \to \psi)[e] &= \to_1(H^A(\varphi)[e], H^A(\psi)[e]) \\
H^A(\varphi \leftrightarrow \psi)[e] &= \leftrightarrow_1(H^A(\varphi)[e], H^A(\psi)[e]) \\
H^A((\forall x)\varphi)[e] &= \min_{a \in A}(H^A(\varphi)[e(x/a)]) \\
H^A((\exists x)\varphi)[e] &= \max_{a \in A}(H^A(\varphi)[e(x/a)])
\end{aligned}
$$

kde $-_1$, $\wedge_1$, $\vee_1$, $\to_1$, $\leftrightarrow_1$ jsou Booleovské funkce dané tabulkami a $e(x/a)$ pro $a \in A$ značí ohodnocení získané z e nastavením $e(x) = a$.

Pozorování $H^A(\varphi)[e]$ *závisí pouze na ohodnocení volných proměnných ve* φ.

Platnost při ohodnocení

Formule φ *je splněna* (*platí*) *ve struktuře* $\mathcal{A}$ *při ohodnocení* e, pokud $H^{\mathcal{A}}(\varphi)[e] = 1$. Pak píšeme $\mathcal{A} \models \varphi[e]$, v opačném případě $\mathcal{A} \not\models \varphi[e]$. Platí

$$\begin{array}{lcl}
\mathcal{A} \models \neg\varphi[e] & \Leftrightarrow & \mathcal{A} \not\models \varphi[e] \\
\mathcal{A} \models (\varphi \wedge \psi)[e] & \Leftrightarrow & \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ a } \mathcal{A} \models \psi[e] \\
\mathcal{A} \models (\varphi \vee \psi)[e] & \Leftrightarrow & \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ nebo } \mathcal{A} \models \psi[e] \\
\mathcal{A} \models (\varphi \to \psi)[e] & \Leftrightarrow & \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ implikuje } \mathcal{A} \models \psi[e] \\
\mathcal{A} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)[e] & \Leftrightarrow & \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ právě když } \mathcal{A} \models \psi[e] \\
\mathcal{A} \models (\forall x)\varphi[e] & \Leftrightarrow & \mathcal{A} \models \varphi[e(x/a)] \text{ pro každé } a \in A \\
\mathcal{A} \models (\exists x)\varphi[e] & \Leftrightarrow & \mathcal{A} \models \varphi[e(x/a)] \text{ pro nějaké } a \in A
\end{array}$$

Pozorování *Nechť* t *je substituovatelný za* x *do* φ *a* ψ *je varianta* φ. *Pak pro každou strukturu* $\mathcal{A}$ *a ohodnocení* e *platí*

1) $\mathcal{A} \models \varphi(x/t)[e]$ *právě když* $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/a)]$ *pro* $a = t^{\mathcal{A}}[e]$,
2) $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ *právě když* $\mathcal{A} \models \psi[e]$.

Platnost ve struktuře

Nechť φ je formule jazyka L a $\mathcal{A}$ je struktura pro L.

- φ je *pravdivá* (*platí*) *ve struktuře* $\mathcal{A}$, značeno $\mathcal{A} \models \varphi$, pokud $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ pro každé ohodnocení $e\colon \mathrm{Var} \to A$. V opačném případě píšeme $\mathcal{A} \not\models \varphi$.
- φ je *lživá v* $\mathcal{A}$, pokud $\mathcal{A} \models \neg\varphi$, tj. $\mathcal{A} \not\models \varphi[e]$ pro každé $e\colon \mathrm{Var} \to A$.
- Pro každé formule φ, ψ, proměnnou x a strukturu $\mathcal{A}$ platí

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \mathcal{A} \models \varphi & \Rightarrow \quad \mathcal{A} \not\models \neg\varphi \\
(2) & \mathcal{A} \models \varphi \wedge \psi & \Leftrightarrow \quad \mathcal{A} \models \varphi \text{ a } \mathcal{A} \models \psi \\
(3) & \mathcal{A} \models \varphi \vee \psi & \Leftarrow \quad \mathcal{A} \models \varphi \text{ nebo } \mathcal{A} \models \psi \\
(4) & \mathcal{A} \models \varphi & \Leftrightarrow \quad \mathcal{A} \models (\forall x)\varphi
\end{array}
$$

- Je-li φ sentence, je φ pravdivá v $\mathcal{A}$ či lživá v $\mathcal{A}$ a tedy implikace (1) platí i obráceně. Je-li navíc ψ sentence, také implikace (3) platí i obráceně.
- Z (4) plyne, že $\mathcal{A} \models \varphi$ právě když $\mathcal{A} \models \psi$, kde ψ je *generální uzávěr* φ, tj. formule $(\forall x_1) \cdots (\forall x_n)\varphi$, v níž $x_1, \ldots, x_n$ jsou všechny volné proměnné φ.

Platnost v teorii

- *Teorie* jazyka L je libovolná množina T formulí jazyka L (tzv. *axiomů*).
- *Model teorie* T je L-struktura $\mathcal{A}$ taková, že $\mathcal{A} \models \varphi$ pro každé $\varphi \in T$, značíme $\mathcal{A} \models T$.
- *Třída modelů* teorie T je $M(T) = \{\mathcal{A} \in M(L) \mid \mathcal{A} \models T\}$.
- Formule φ je *pravdivá v* T (*platí v* T), značíme $T \models \varphi$, pokud $\mathcal{A} \models \varphi$ pro každý model $\mathcal{A}$ teorie T. V opačném případě píšeme $T \not\models \varphi$.
- Formule φ je *lživá v* T, pokud $T \models \neg\varphi$, tj. je lživá v každém modelu T.
- Formule φ je *nezávislá v* T, pokud není pravdivá v T ani lživá v T.
- Je-li $T = \emptyset$, je $M(T) = M(L)$ a teorii T vynecháváme, případně říkáme *"v logice"*. Pak $\models \varphi$ značí, že φ je *pravdivá* ((*logicky*) *platí*, *tautologie*).
- *Důsledek* T je množina $\theta^L(T)$ všech sentencí jazyka L pravdivých v T, tj.

$$\theta^L(T) = \{\varphi \in \mathrm{Fm}_L \mid T \models \varphi \text{ a } \varphi \text{ je sentence}\}.$$

Příklad teorie

Teorie uspořádání T jazyka $L = \langle \leq \rangle$ s rovností má axiomy

$$x \leq x \qquad \text{(reflexivita)}$$

$$x \leq y \ \wedge \ y \leq x \ \rightarrow \ x = y \qquad \text{(antisymetrie)}$$

$$x \leq y \ \wedge \ y \leq z \ \rightarrow \ x \leq z \qquad \text{(tranzitivita)}$$

Modely T jsou L-struktury $\langle S, \leq_S \rangle$, tzv. uspořádané množiny, ve kterých platí axiomy T, např. $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ nebo $\mathcal{B} = \langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$ pro $X = \{0, 1, 2\}$.

- *Formule φ ve tvaru $x \leq y \vee y \leq x$ platí v $\mathcal{A}$, ale neplatí v $\mathcal{B}$, neboť např. $\mathcal{B} \not\models \varphi[e]$ při ohodnocení $e(x) = \{0\}, e(y) = \{1\}$, je tedy nezávislá v T.*
- *Sentence ψ ve tvaru $(\exists x)(\forall y)(y \leq x)$ je pravdivá v $\mathcal{B}$ a lživá v $\mathcal{A}$, je tedy rovněž nezávislá v T. Píšeme $\mathcal{B} \models \psi$, $\mathcal{A} \models \neg\psi$.*
- *Formule χ ve tvaru $(x \leq y \wedge y \leq z \wedge z \leq x) \rightarrow (x = y \wedge y = z)$ je pravdivá v T, píšeme $T \models \chi$, totéž platí pro její generální uzávěr.*

Výroková a predikátová logika - VII

Petr Gregor

KTIML MFF UK

ZS 2016/2017

Vlastnosti teorií

Teorie T jazyka L je *(sémanticky)*

- *sporná*, jestliže v ní platí $\bot$ (spor), jinak je *bezesporná* (*splnitelná*),
- *kompletní*, jestliže není sporná a každá sentence je v ní pravdivá či lživá,
- *extenze* teorie T' jazyka L', jestliže $L' \subseteq L$ a $\theta^{L'}(T') \subseteq \theta^{L}(T)$,
  o extenzi T teorie T' řekneme, že je *jednoduchá*, pokud $L = L'$, a *konzervativní*, pokud $\theta^{L'}(T') = \theta^{L}(T) \cap \mathrm{Fm}_{L'}$,
- *ekvivalentní* s teorií T', jestliže T je extenzí T' a T' je extenzí T,

Struktury $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ pro jazyk L jsou *elementárně ekvivalentní*, značeno $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, platí-li v nich stejné formule.

Pozorování *Nechť T a T' jsou teorie jazyka L. Teorie T je (sémanticky)*

(1) *bezesporná, právě když má model,*

(2) *kompletní, právě když má až na elementární ekvivalenci jediný model,*

(3) *extenze T', právě když $M(T) \subseteq M(T')$,*

(4) *ekvivalentní s T', právě když $M(T) = M(T')$.*

Nesplnitelnost a pravdivost

Problém pravdivosti v teorii lze převést na problém existence modelu.

Tvrzení *Pro každou teorii T a sentenci φ (stejného jazyka)*

$$T, \neg\varphi \text{ nemá model} \quad \Leftrightarrow \quad T \models \varphi.$$

Důkaz Z definic plynou ekvivalence následujících tvrzení.

(1) $T, \neg\varphi$ nemá model,

(2) $\neg\varphi$ neplatí v žádném modelu teorie T,

(3) φ platí v každém modelu teorie T,

(4) $T \models \varphi$. $\square$

Poznámka *Předpoklad, že φ je sentence, je nutný pro $(2) \Leftrightarrow (3)$.*

Např. teorie $\{P(c), \neg P(x)\}$ nemá model, ale $P(c) \not\models P(x)$, kde P je unární relační symbol a c je konstantní symbol.

Podstruktura

Nechť $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^A, \mathcal{F}^A \rangle$ a $\mathcal{B} = \langle B, \mathcal{R}^B, \mathcal{F}^B \rangle$ jsou struktury pro jazyk $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$.

Řekneme, že $\mathcal{B}$ je (indukovaná) *podstruktura* $\mathcal{A}$, značeno $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, pokud

(i) $B \subseteq A$,

(ii) $R^B = R^A \cap B^{\mathrm{ar}(R)}$ pro každé $R \in \mathcal{R}$,

(iii) $f^B = f^A \cap (B^{\mathrm{ar}(f)} \times B)$, tj. $f^B = f^A \restriction B^{\mathrm{ar}(f)}$, pro každé $f \in \mathcal{F}$.

Množina $C \subseteq A$ je doménou podstruktury $\mathcal{A}$, právě když C je uzavřená na všechny funkce struktury $\mathcal{A}$, pak příslušnou podstrukturu značíme $\mathcal{A} \restriction C$ a říkáme, že je to *restrikce* (*parcializace*) struktury $\mathcal{A}$ na C.

- Množina $C \subseteq A$ je *uzavřená* na funkci $f \colon A^n \to A$, pokud $f(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in C$ pro každé $x_0, \ldots, x_{n-1} \in C$.

Např. $\underline{\mathbb{Z}} = \langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0 \rangle$ *je podstrukturou* $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0 \rangle$ *a lze psát* $\underline{\mathbb{Z}} = \underline{\mathbb{Q}} \restriction \mathbb{Z}$.
Dále $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$ *je jejich podstrukturou a* $\underline{\mathbb{N}} = \underline{\mathbb{Q}} \restriction \mathbb{N} = \underline{\mathbb{Z}} \restriction \mathbb{N}$.

Platnost v podstruktuře

Nechť $\mathcal{B}$ je podstruktura struktury $\mathcal{A}$ pro (pevný) jazyk L.

Tvrzení *Pro každou otevřenou formuli φ a ohodnocení $e\colon \mathrm{Var} \to B$ platí*

$$\mathcal{B} \models \varphi[e] \quad \textit{právě když} \quad \mathcal{A} \models \varphi[e].$$

Důkaz Je-li φ atomická, plyne tvrzení z definice platnosti při ohodnocení. Dále snadno indukcí dle struktury formule. □

Důsledek *Otevřená formule platí ve struktuře $\mathcal{A}$, právě když platí v každé podstruktuře $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.*

- Teorie T je *otevřená*, jsou-li všechny její axiomy otevřené formule.

Důsledek *Každá podstruktura modelu otevřené teorie T je modelem T.*

Např. každá podstruktura grafu, tj. modelu teorie grafů, je rovněž grafem, zveme ho podgraf. Obdobně např. podgrupa nebo Booleova podalgebra.

Generovaná podstruktura, expanze, redukt

Nechť $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^A, \mathcal{F}^A \rangle$ je struktura a $X \subseteq A$. Označme B nejmenší podmnožinu množiny A obsahující X, která je uzavřená na všechny funkce struktury $\mathcal{A}$ (včetně konstant). Pak strukturu $\mathcal{A} \restriction B$ značíme rovněž $\mathcal{A}\langle X \rangle$ a podstruktura říkáme, že je to $\mathcal{A}$ *generovaná* množinou X.

Např. pro $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0 \rangle$, $\underline{\mathbb{Z}} = \langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0 \rangle$ *a* $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$ *je* $\underline{\mathbb{Q}}\langle \{1\} \rangle = \underline{\mathbb{N}}$, $\underline{\mathbb{Q}}\langle \{-1\} \rangle = \underline{\mathbb{Z}}$ *a* $\underline{\mathbb{Q}}\langle \{2\} \rangle$ *je podstruktura na všech sudých přirozených číslech.*

Nechť $\mathcal{A}'$ je struktura pro jazyk L' a $L \subseteq L'$ je jazyk. Odebráním realizací symbolů, jež nejsou v L, získáme z $\mathcal{A}'$ strukturu $\mathcal{A}$, kterou nazýváme *redukt* struktury $\mathcal{A}'$ na jazyk L. Obráceně, $\mathcal{A}'$ je *expanze* struktury $\mathcal{A}$ do jazyka L'.

Např. $\langle \mathbb{N}, + \rangle$ *je redukt* $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$. *Naopak, struktura* $\langle \mathbb{N}, +, c_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ *taková, že* $c_i = i$ *pro všechna* $i \in \mathbb{N}$, *je expanze* $\langle \mathbb{N}, + \rangle$ *o jména prvků z* $\mathbb{N}$.

Věta o konstantách

Věta *Nechť φ je formule jazyka L s volnými proměnnými $x_1, \ldots, x_n$ a T je teorie jazyka L. Označme L' rozšíření L o nové konstantní symboly $c_1, \ldots, c_n$ a T' teorii T nad jazykem L'. Pak*

$$T \models \varphi \quad \textit{právě když} \quad T' \models \varphi(x_1/c_1, \ldots, x_n/c_n).$$

Důkaz ($\Rightarrow$) Je-li $\mathcal{A}'$ model teorie T', nechť $\mathcal{A}$ je redukt $\mathcal{A}'$ na L. Jelikož $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ pro každé ohodnocení e, platí i

$$\mathcal{A} \models \varphi[e(x_1/c_1^{\mathcal{A}'}, \ldots, x_n/c_n^{\mathcal{A}'})], \quad \text{tj. } \mathcal{A}' \models \varphi(x_1/c_1, \ldots, x_n/c_n).$$

($\Leftarrow$) Je-li $\mathcal{A}$ model teorie T a e ohodnocení, nechť $\mathcal{A}'$ je expanze $\mathcal{A}$ na L' o konstanty $c_i^{\mathcal{A}'} = e(x_i)$ pro všechna i. Jelikož $\mathcal{A}' \models \varphi(x_1/c_1, \ldots, x_n/c_n)[e']$ pro libovolné ohodnocení e', platí i

$$\mathcal{A}' \models \varphi[e(x_1/c_1^{\mathcal{A}'}, \ldots, x_n/c_n^{\mathcal{A}'})], \quad \text{tj. } \mathcal{A} \models \varphi[e]. \quad \square$$

Booleovy algebry

Teorie *Booleových algeber* jazyka $L = \langle -, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ s rovností má axiomy

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \qquad \text{(asociativita } \wedge\text{)}$$
$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \qquad \text{(asociativita } \vee\text{)}$$
$$x \wedge y = y \wedge x \qquad \text{(komutativita } \wedge\text{)}$$
$$x \vee y = y \vee x \qquad \text{(komutativita } \vee\text{)}$$
$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \qquad \text{(distributivita } \wedge \text{ k } \vee\text{)}$$
$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \qquad \text{(distributivita } \vee \text{ k } \wedge\text{)}$$
$$x \wedge (x \vee y) = x, \quad x \vee (x \wedge y) = x \qquad \text{(absorbce)}$$
$$x \vee (-x) = 1, \quad x \wedge (-x) = 0 \qquad \text{(komplementace)}$$
$$0 \neq 1 \qquad \text{(netrivialita)}$$

Nejmenší model je $\underline{2} = \langle 2, -_1, \wedge_1, \vee_1, 0, 1 \rangle$. Konečné Booleovy algebry jsou (až na izomorfismus) právě $\underline{^n 2} = \langle {}^n 2, -_n, \wedge_n, \vee_n, 0_n, 1_n \rangle$ pro $n \in \mathbb{N}^+$, kde jednotlivé operace *(na binárních n-ticích)* jsou operace z $\underline{2}$ *“po složkách”*.

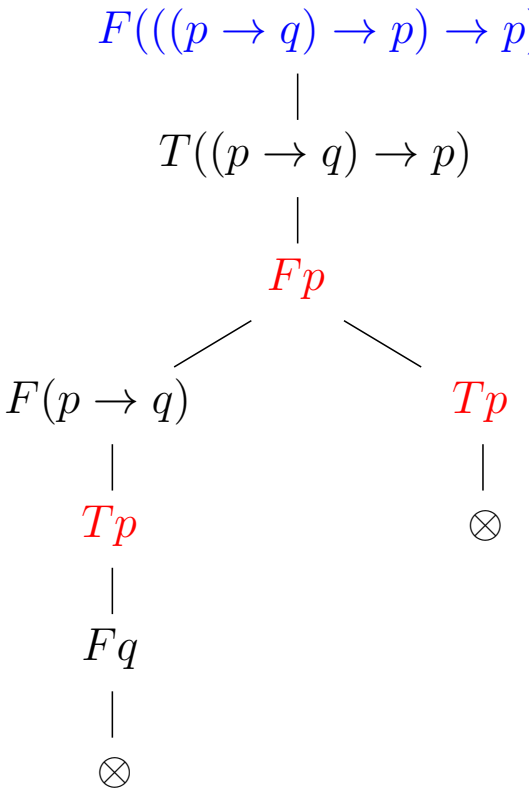
Vztah výrokové a predikátové logiky

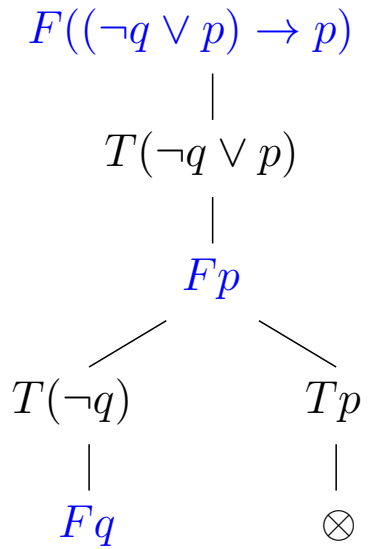
- Výrokové formule s (*univerzálními*) spojkami $\neg$, $\wedge$, $\vee$ (případně s $\top$, $\bot$) lze považovat za Booleovské termy. Hodnota výroku φ při daném ohodnocení je pak hodnotou termu v Booleově algebře $\underline{2}$.
- Algebra výroků nad $\mathbb{P}$ je Booleova algebra (i pro $\mathbb{P}$ nekonečné).
- Reprezentujeme-li atomické formule v otevřené formuli φ (bez rovnosti) pomocí prvovýroků, získame výrokovou formuli, která je pravdivá, právě když φ je pravdivá.
- Výrokovou logiku lze zavést jako fragment predikátové logiky pomocí nulárních relačních symbolů (*syntax*) a nulárních relací (*sémantika*), přičemž $A^0 = \{\emptyset\} = 1$ a tedy $R^A \subseteq A^0$ je $R^A = \emptyset = 0$ anebo $R^A = \{\emptyset\} = 1$.

Tablo metoda ve VL - opakování

- Tablo je binární strom reprezentující vyhledávání *protipříkladu*.
- Vrcholy jsou označeny položkami, tj. formulemi s příznakem T / F, který reprezentuje předpoklad, že formule v nějakém modelu platí / neplatí.
- Je-li tento předpoklad správný, je správný i v nějaké větvi pod ní.
- Větev je sporná (selže), pokud obsahuje $T\psi$, $F\psi$ pro nějaké ψ.
- Důkaz formule φ je sporné tablo s kořenem $F\varphi$, tj. tablo v němž každá větev je sporná (nebyl nalezen protipříklad), pak φ je pravdivá.
- Pokud protipříklad existuje, v dokončeném tablu bude větev, která ho poskytuje, tato větev může být nekonečná.
- Lze zkonstruovat systematické tablo, jež je vždy dokončené.
- Pokud je φ pravdivá, systematické tablo pro φ je sporné, tj. důkazem φ, v tom případě je i konečné.

Tablo metoda ve VL - příklady





a) Tablo důkaz formule $((p \to q) \to p) \to p$.

b) Dokončené tablo pro $(\neg q \vee p) \to p$. Levá větev poskytuje protipříklad $v(p) = v(q) = 0$.

Tablo metoda v PL - rozdíly

- Formule v položkách budou sentence (uzavřené formule), tj. formule bez volných proměnných.
- Přidáme nová atomická tabla pro kvantifikátory.
- Za kvantifikované proměnné se budou substituovat konstantní termy dle jistých pravidel.
- Jazyk rozšíříme o nové (pomocné) konstantní symboly (spočetně mnoho) pro reprezentaci *"svědků"* položek $T(\exists x)\varphi(x)$ a $F(\forall x)\varphi(x)$.
- V dokončené bezesporné větvi s položkou $T(\forall x)\varphi(x)$ či $F(\exists x)\varphi(x)$ budou instance $T\varphi(x/t)$ resp. $F\varphi(x/t)$ pro každý konstantní term t (rozšířeného jazyka).

Předpoklady

1) *Dokazovaná formule φ je sentence.* Není-li φ sentence, můžeme ji nahradit za její generální uzávěr φ', neboť pro každou teorii T,

$$T \models \varphi \quad \text{právě když} \quad T \models \varphi'.$$

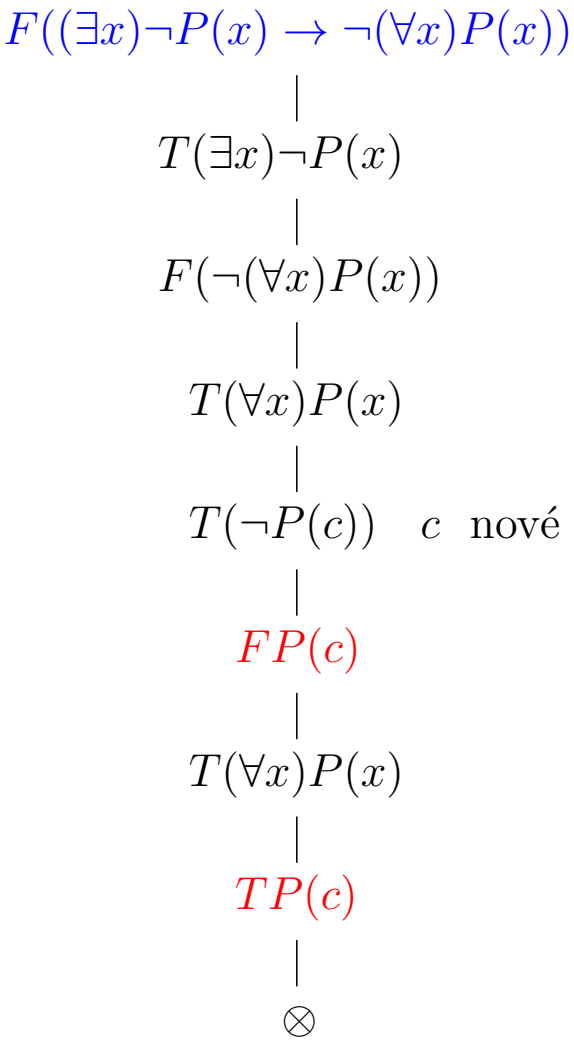
2) *Dokazujeme z teorie v uzavřeném tvaru, tj. každý axiom je sentence.* Nahrazením každého axiomu ψ za jeho generální uzávěr ψ' získáme ekvivalentní teorii, neboť pro každou strukturu $\mathcal{A}$ (daného jazyka L),

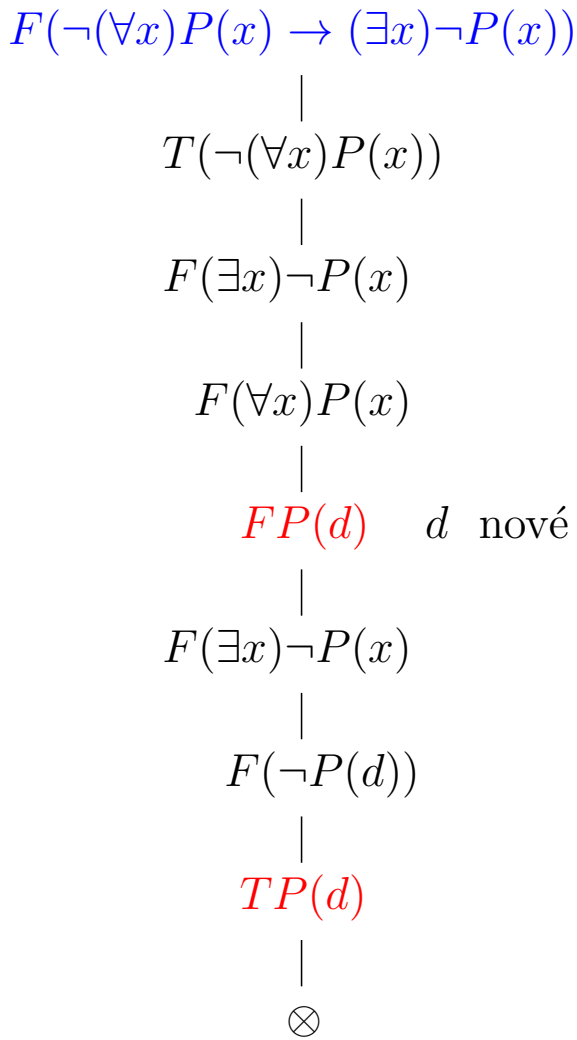
$$\mathcal{A} \models \psi \quad \text{právě když} \quad \mathcal{A} \models \psi'.$$

3) *Jazyk L je spočetný.* Pak každá teorie nad L je spočetná. Označme L_C rozšíření jazyka L o nové konstantní symboly $c_0, c_1, \ldots$ (spočetně mnoho). Platí, že konstantních termů jazyka L_C je spočetně. Nechť t_i označuje i-tý konstantní term (v pevně zvoleném očíslování).

4) *Zatím budeme předpokládat, že jazyk je bez rovnosti.*

Tablo v PL - příklady





Atomická tabla - původní

Atomická tabla jsou všechny následující (položkami značkované) stromy, kde α je libovolná atomická sentence a φ, ψ jsou libovolné sentence, vše v L_C.

$T\alpha$	$F\alpha$	$T(\varphi \wedge \psi)$ | $T\varphi$ | $T\psi$	$F(\varphi \wedge \psi)$ $F\varphi$ $\quad$ $F\psi$	$T(\varphi \vee \psi)$ $T\varphi$ $\quad$ $T\psi$	$F(\varphi \vee \psi)$ | $F\varphi$ | $F\psi$
$T(\neg\varphi)$ | $F\varphi$	$F(\neg\varphi)$ | $T\varphi$	$T(\varphi \to \psi)$ $F\varphi$ $\quad$ $T\psi$	$F(\varphi \to \psi)$ | $T\varphi$ | $F\psi$	$T(\varphi \leftrightarrow \psi)$ $T\varphi$ $\quad$ $F\varphi$ | $\quad$ | $T\psi$ $\quad$ $F\psi$	$F(\varphi \leftrightarrow \psi)$ $T\varphi$ $\quad$ $F\varphi$ | $\quad$ | $F\psi$ $\quad$ $T\psi$

Atomická tabla - nová

Atomická tabla jsou i následující (položkami značkované) stromy, kde φ je libovolná formule jazyka L_C ve volné proměnné x, t je libovolný konstantní term jazyka L_C a c je nový konstantní symbol z $L_C \setminus L$.

♯	*	*	♯
$T(\forall x)\varphi(x)$ | $T\varphi(x/t)$	$F(\forall x)\varphi(x)$ | $F\varphi(x/c)$	$T(\exists x)\varphi(x)$ | $T\varphi(x/c)$	$F(\exists x)\varphi(x)$ | $F\varphi(x/t)$
pro libovolný konst. term t	pro *novou* konstantu c	pro *novou* konstantu c	pro libovolný konst. term t

Poznámka *Konstantní symbol c reprezentuje "svědka" položky $T(\exists x)\varphi(x)$ či $F(\forall x)\varphi(x)$. Jelikož nechceme, aby na c byly kladeny další požadavky, je v definici tabla omezeno, jaký konstantní symbol c lze použít.*

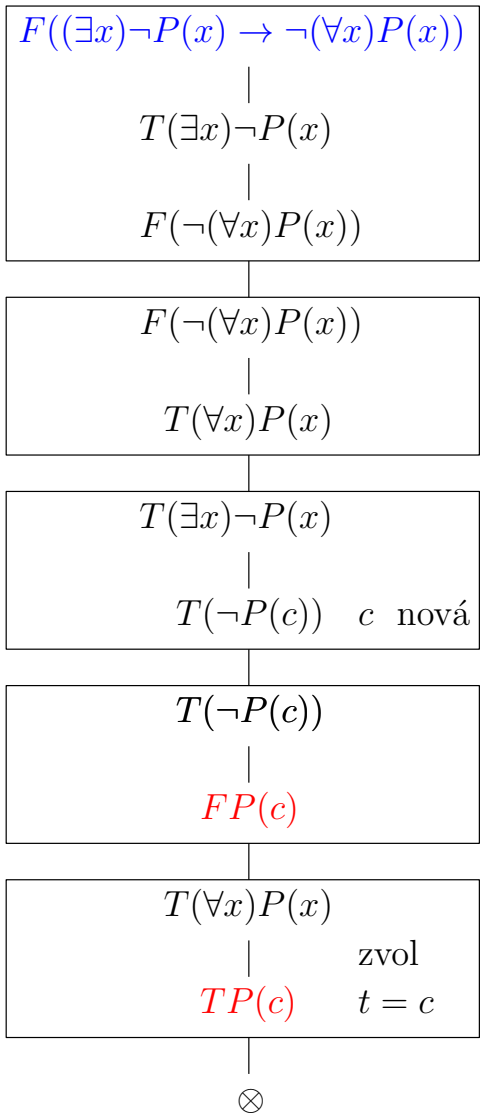
Tablo

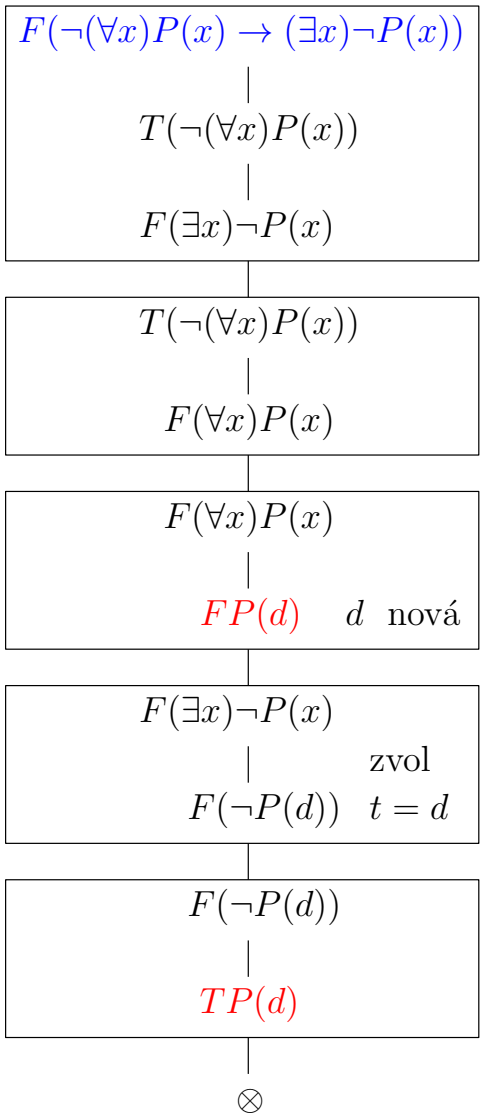
Konečné tablo z teorie T je binární, položkami značkovaný strom s předpisem

- (i) každé atomické tablo je konečné tablo z T, přičemž v případě $(*)$ lze použít libovolný konstantní symbol $c \in L_C \setminus L$,
- (ii) je-li P položka na větvi V konečného tabla z T, pak připojením atomického tabla pro P na konec větve V vznikne konečné tablo z T, přičemž v případě $(*)$ lze použít pouze konstantní symbol $c \in L_C \setminus L$, který se dosud nevyskytuje na V,
- (iii) je-li V větev konečného tabla z T a $\varphi \in T$, pak připojením $T\varphi$ na konec větve V vznikne rovněž konečné tablo z T.
- (iv) každé konečné tablo z T vznikne konečným užitím pravidel (i), (ii), (iii).

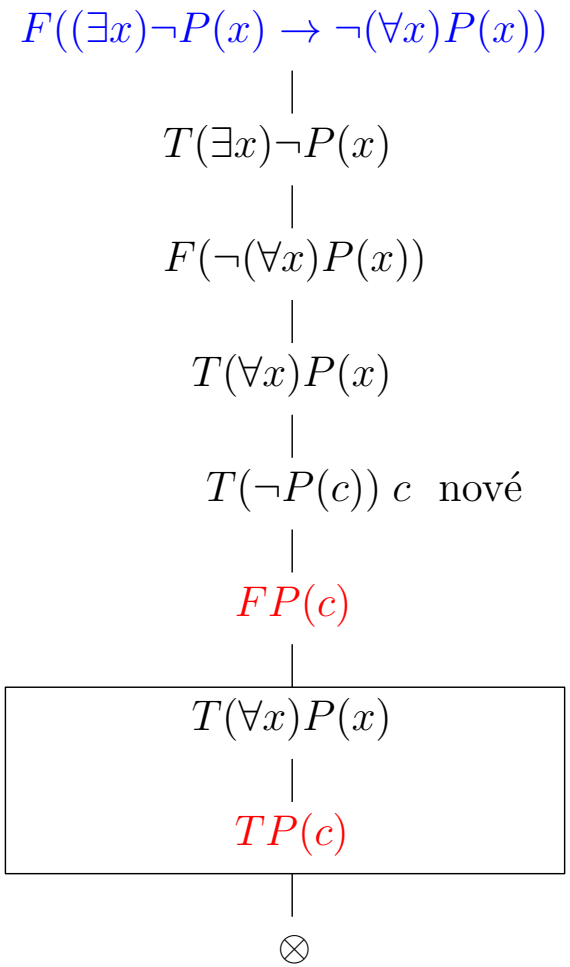
Tablo z teorie T je posloupnost $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n, \ldots$ konečných tabel z T takových, že τ_{n+1} vznikne z τ_n pomocí (ii) či (iii), formálně $\tau = \cup\tau_n$.

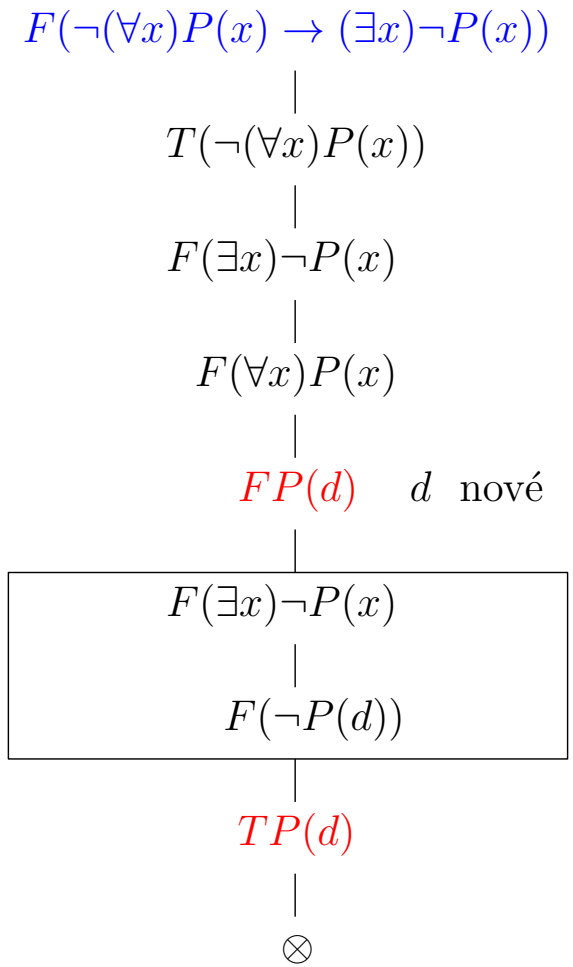
Konstrukce tabla





Konvence



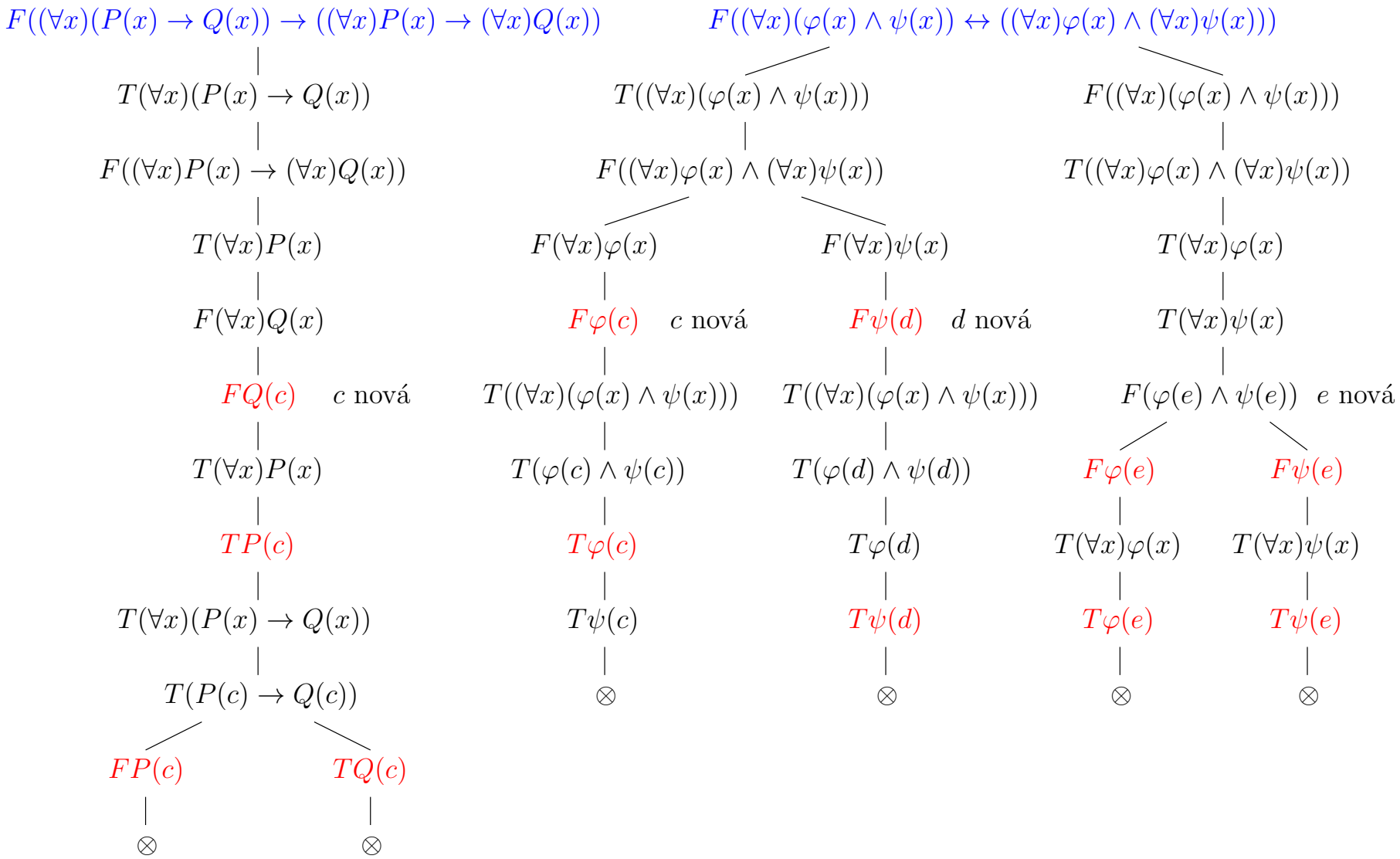


Položku, dle které tablo prodlužujeme, nebudeme na větev znovu zapisovat kromě případů, kdy položka je tvaru $T(\forall x)\varphi(x)$ či $F(\exists x)\varphi(x)$.

Tablo důkaz

- Větev V tabla τ je *sporná*, obsahuje-li položky $T\varphi$ a $F\varphi$ pro nějakou sentenci φ, jinak je *bezesporná*.
- Tablo τ je *sporné*, pokud je každá jeho větev sporná.
- *Tablo důkaz* (*důkaz tablem*) sentence φ z teorie T je sporné tablo z T s položkou $F\varphi$ v kořeni.
- φ je *(tablo) dokazatelná* z teorie T, píšeme $T \vdash \varphi$, má-li tablo důkaz z T.
- *Zamítnutí* sentence φ *tablem* z teorie T je sporné tablo z T s položkou $T\varphi$ v kořeni.
- Sentence φ je *(tablo) zamítnutelná* z teorie T, má-li zamítnutí tablem z T, tj. $T \vdash \neg\varphi$.

Příklady


$F((\forall x)(P(x) \to Q(x)) \to ((\forall x)P(x) \to (\forall x)Q(x))$
$T(\forall x)(P(x) \to Q(x))$
$F((\forall x)P(x) \to (\forall x)Q(x))$
$T(\forall x)P(x)$
$F(\forall x)Q(x)$
$FQ(c)$ c nová
$T(\forall x)P(x)$
$TP(c)$
$T(\forall x)(P(x) \to Q(x))$
$T(P(c) \to Q(c))$
$FP(c)$
$TQ(c)$
$\otimes$
$\otimes$
$F((\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \leftrightarrow ((\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x)))$
$T((\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x)))$
$F((\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x))$
$F(\forall x)\varphi(x)$
$F(\forall x)\psi(x)$
$F\varphi(c)$ c nová
$F\psi(d)$ d nová
$T((\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x)))$
$T((\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x)))$
$T(\varphi(c) \wedge \psi(c))$
$T(\varphi(d) \wedge \psi(d))$
$T\varphi(c)$
$T\varphi(d)$
$T\psi(c)$
$T\psi(d)$
$\otimes$
$\otimes$
$F((\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x)))$
$T((\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x))$
$T(\forall x)\varphi(x)$
$T(\forall x)\psi(x)$
$F(\varphi(e) \wedge \psi(e))$ e nová
$F\varphi(e)$
$F\psi(e)$
$T(\forall x)\varphi(x)$
$T(\forall x)\psi(x)$
$T\varphi(e)$
$T\psi(e)$
$\otimes$
$\otimes$

Výroková a predikátová logika - VIII

Petr Gregor

KTIML MFF UK

ZS 2016/2017

Tablo metoda v PL - rozdíly

- Formule v položkách budou sentence (uzavřené formule), tj. formule bez volných proměnných.
- Přidáme nová atomická tabla pro kvantifikátory.
- Za kvantifikované proměnné se budou substituovat konstantní termy dle jistých pravidel.
- Jazyk rozšíříme o nové (pomocné) konstantní symboly (spočetně mnoho) pro reprezentaci *"svědků"* položek $T(\exists x)\varphi(x)$ a $F(\forall x)\varphi(x)$.
- V dokončené bezesporné větvi s položkou $T(\forall x)\varphi(x)$ či $F(\exists x)\varphi(x)$ budou instance $T\varphi(x/t)$ resp. $F\varphi(x/t)$ pro každý konstantní term t (rozšířeného jazyka).

Atomická tabla - původní

Atomická tabla jsou všechny následující (položkami značkované) stromy, kde α je libovolná atomická sentence a φ, ψ jsou libovolné sentence, vše v L_C.

$T\alpha$	$F\alpha$	$T(\varphi \wedge \psi)$ | $T\varphi$ | $T\psi$	$F(\varphi \wedge \psi)$ $F\varphi$ $\quad$ $F\psi$	$T(\varphi \vee \psi)$ $T\varphi$ $\quad$ $T\psi$	$F(\varphi \vee \psi)$ | $F\varphi$ | $F\psi$
$T(\neg\varphi)$ | $F\varphi$	$F(\neg\varphi)$ | $T\varphi$	$T(\varphi \to \psi)$ $F\varphi$ $\quad$ $T\psi$	$F(\varphi \to \psi)$ | $T\varphi$ | $F\psi$	$T(\varphi \leftrightarrow \psi)$ $T\varphi$ $\quad$ $F\varphi$ | $\quad$ | $T\psi$ $\quad$ $F\psi$	$F(\varphi \leftrightarrow \psi)$ $T\varphi$ $\quad$ $F\varphi$ | $\quad$ | $F\psi$ $\quad$ $T\psi$

Atomická tabla - nová

Atomická tabla jsou i následující (položkami značkované) stromy, kde φ je libovolná formule jazyka L_C ve volné proměnné x, t je libovolný konstantní term jazyka L_C a c je nový konstantní symbol z $L_C \setminus L$.

♯	*	*	♯
$T(\forall x)\varphi(x)$ | $T\varphi(x/t)$	$F(\forall x)\varphi(x)$ | $F\varphi(x/c)$	$T(\exists x)\varphi(x)$ | $T\varphi(x/c)$	$F(\exists x)\varphi(x)$ | $F\varphi(x/t)$
pro libovolný konst. term t	pro *novou* konstantu c	pro *novou* konstantu c	pro libovolný konst. term t

Poznámka *Konstantní symbol c reprezentuje "svědka" položky $T(\exists x)\varphi(x)$ či $F(\forall x)\varphi(x)$. Jelikož nechceme, aby na c byly kladeny další požadavky, je v definici tabla omezeno, jaký konstantní symbol c lze použít.*

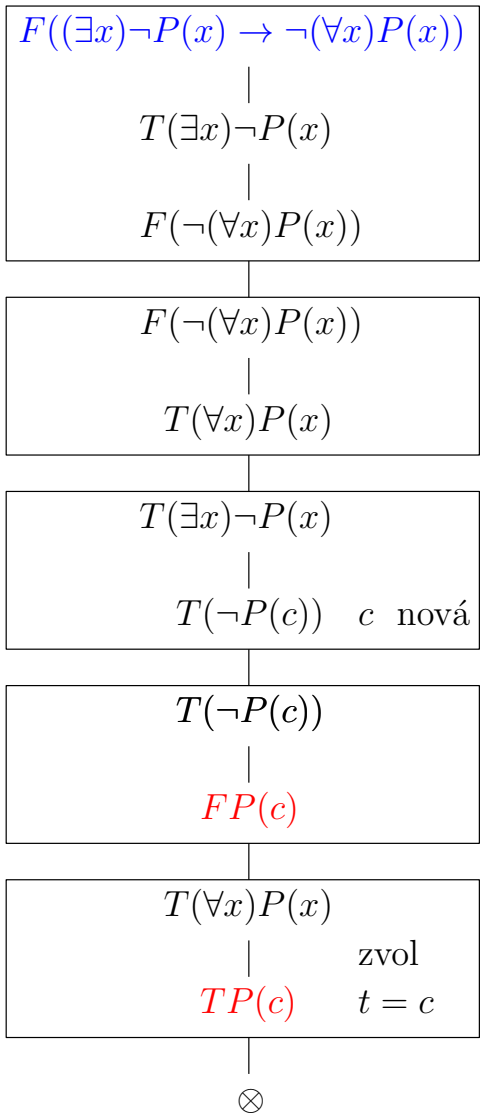
Tablo

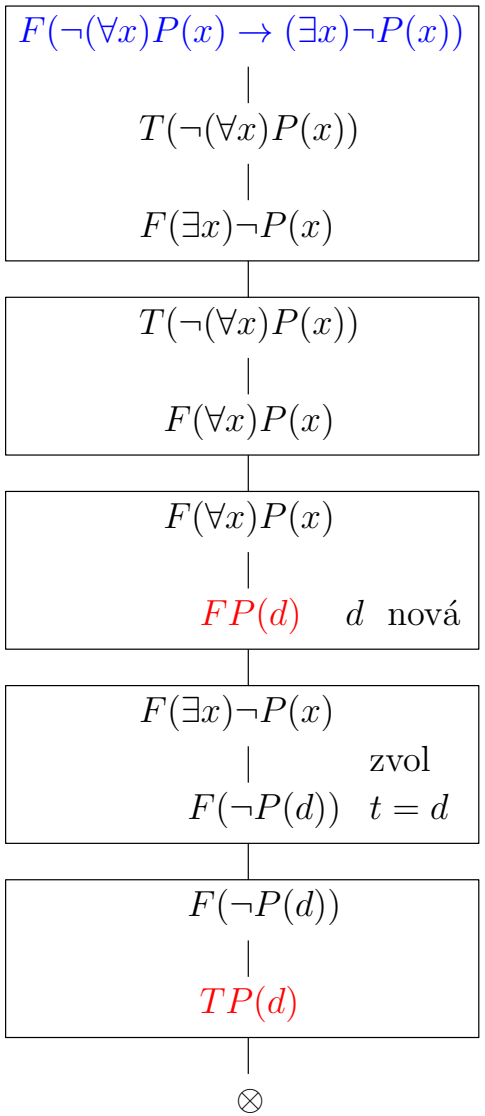
Konečné tablo z teorie T je binární, položkami značkovaný strom s předpisem

- (i) každé atomické tablo je konečné tablo z T, přičemž v případě $(*)$ lze použít libovolný konstantní symbol $c \in L_C \setminus L$,
- (ii) je-li P položka na větvi V konečného tabla z T, pak připojením atomického tabla pro P na konec větve V vznikne konečné tablo z T, přičemž v případě $(*)$ lze použít pouze konstantní symbol $c \in L_C \setminus L$, který se dosud nevyskytuje na V,
- (iii) je-li V větev konečného tabla z T a $\varphi \in T$, pak připojením $T\varphi$ na konec větve V vznikne rovněž konečné tablo z T.
- (iv) každé konečné tablo z T vznikne konečným užitím pravidel (i), (ii), (iii).

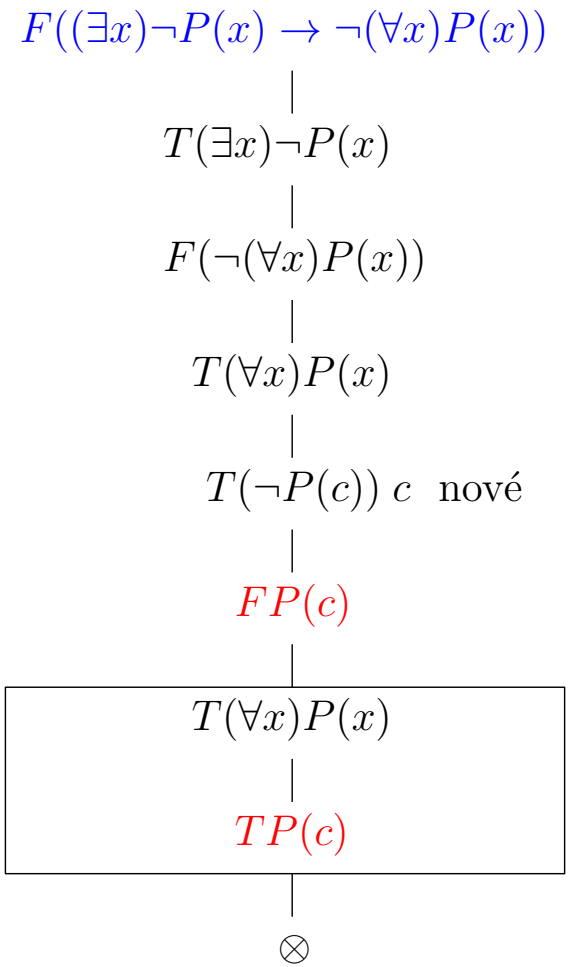
Tablo z teorie T je posloupnost $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n, \ldots$ konečných tabel z T takových, že τ_{n+1} vznikne z τ_n pomocí (ii) či (iii), formálně $\tau = \cup\tau_n$.

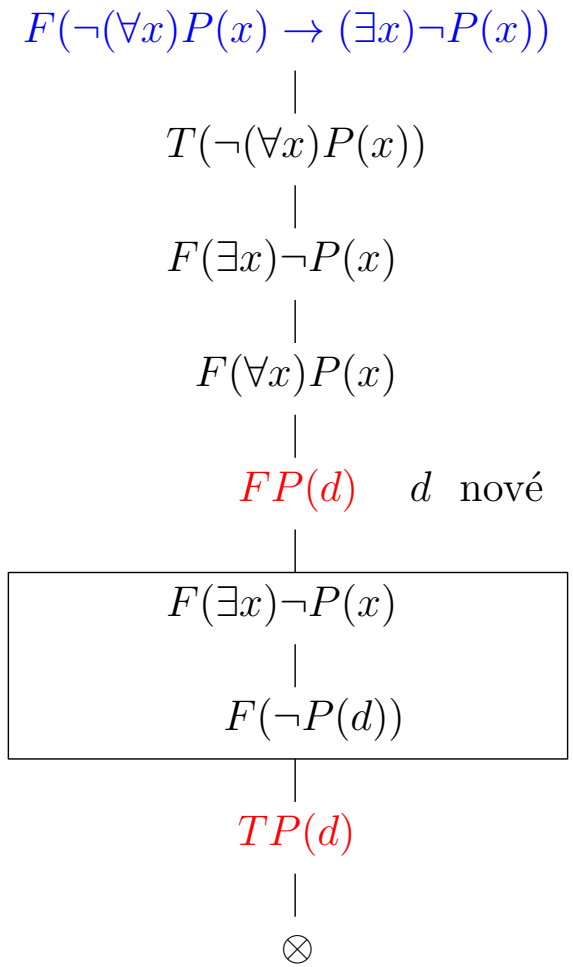
Konstrukce tabla





Konvence



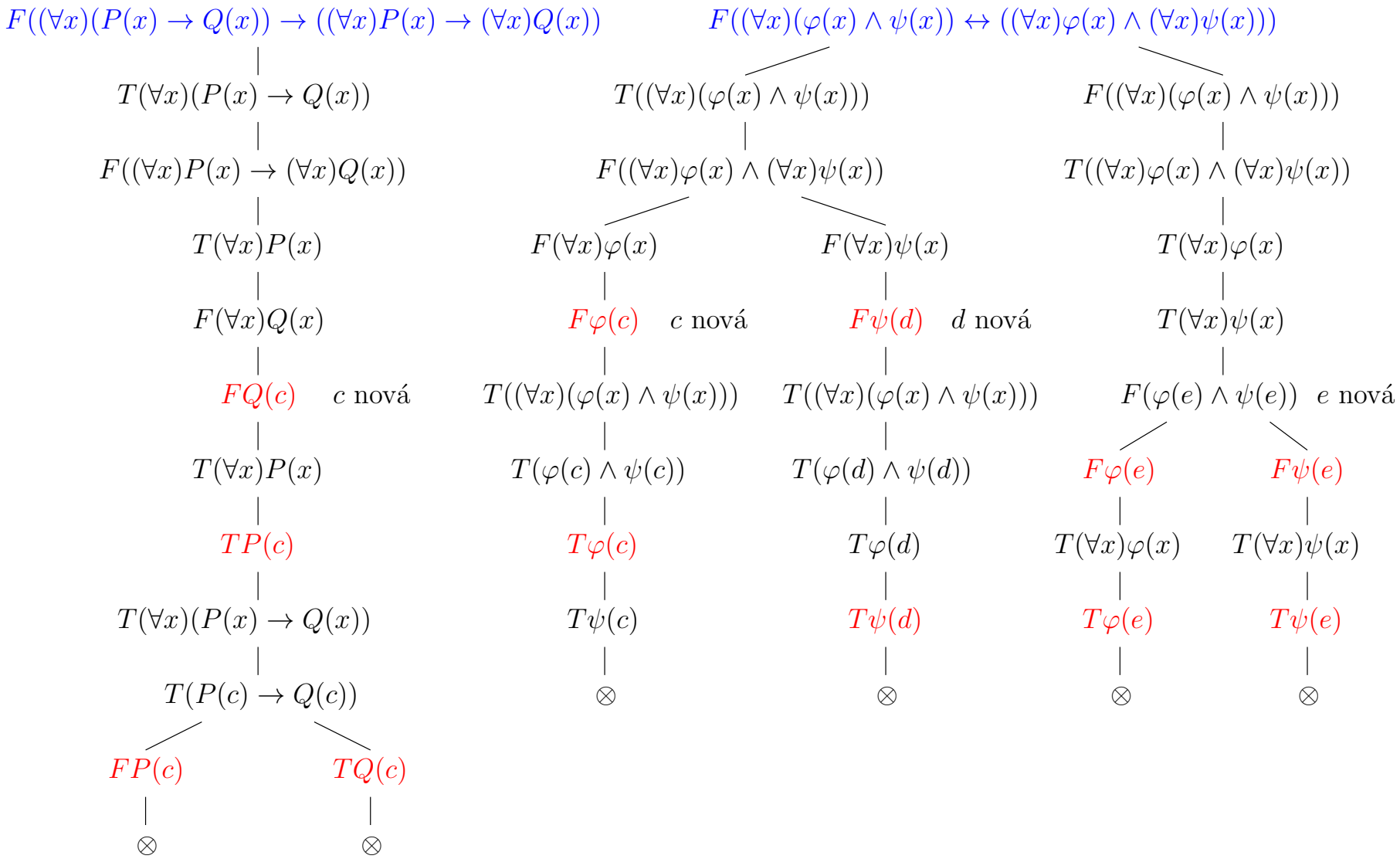


Položku, dle které tablo prodlužujeme, nebudeme na větev znovu zapisovat kromě případů, kdy položka je tvaru $T(\forall x)\varphi(x)$ či $F(\exists x)\varphi(x)$.

Tablo důkaz

- Větev V tabla τ je *sporná*, obsahuje-li položky $T\varphi$ a $F\varphi$ pro nějakou sentenci φ, jinak je *bezesporná*.
- Tablo τ je *sporné*, pokud je každá jeho větev sporná.
- *Tablo důkaz* (*důkaz tablem*) sentence φ z teorie T je sporné tablo z T s položkou $F\varphi$ v kořeni.
- φ je *(tablo) dokazatelná* z teorie T, píšeme $T \vdash \varphi$, má-li tablo důkaz z T.
- *Zamítnutí* sentence φ *tablem* z teorie T je sporné tablo z T s položkou $T\varphi$ v kořeni.
- Sentence φ je *(tablo) zamítnutelná* z teorie T, má-li zamítnutí tablem z T, tj. $T \vdash \neg\varphi$.

Příklady


$F((\forall x)(P(x) \to Q(x)) \to ((\forall x)P(x) \to (\forall x)Q(x))$
$T(\forall x)(P(x) \to Q(x))$
$F((\forall x)P(x) \to (\forall x)Q(x))$
$T(\forall x)P(x)$
$F(\forall x)Q(x)$
$FQ(c)$ c nová
$T(\forall x)P(x)$
$TP(c)$
$T(\forall x)(P(x) \to Q(x))$
$T(P(c) \to Q(c))$
$FP(c)$
$TQ(c)$
$\otimes$
$\otimes$
$F((\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \leftrightarrow ((\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x)))$
$T((\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x)))$
$F((\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x))$
$F(\forall x)\varphi(x)$
$F(\forall x)\psi(x)$
$F\varphi(c)$ c nová
$F\psi(d)$ d nová
$T((\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x)))$
$T((\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x)))$
$T(\varphi(c) \wedge \psi(c))$
$T(\varphi(d) \wedge \psi(d))$
$T\varphi(c)$
$T\varphi(d)$
$T\psi(c)$
$T\psi(d)$
$\otimes$
$\otimes$
$F((\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x)))$
$T((\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x))$
$T(\forall x)\varphi(x)$
$T(\forall x)\psi(x)$
$F(\varphi(e) \wedge \psi(e))$ e nová
$F\varphi(e)$
$F\psi(e)$
$T(\forall x)\varphi(x)$
$T(\forall x)\psi(x)$
$T\varphi(e)$
$T\psi(e)$
$\otimes$
$\otimes$

Dokončené tablo

Chceme, aby dokončená bezesporná větev poskytovala protipříklad.

Výskyt položky P ve vrcholu v tabla τ je *i-tý*, pokud v má v τ právě $i-1$ předků označených P a je *redukovaný* na větvi V skrze v, pokud

a) P není tvaru $T(\forall x)\varphi(x)$ ani $F(\exists x)\varphi(x)$ a P se vyskytuje na V jako kořen atomického tabla, tj. při konstrukci τ již došlo k rozvoji P na V, nebo

b) P je tvaru $T(\forall x)\varphi(x)$ či $F(\exists x)\varphi(x)$, má $(i+1)$-ní výskyt na V a zároveň se na V vyskytuje $T\varphi(x/t_i)$ resp. $F\varphi(x/t_i)$, kde t_i je i-tý konstantní term (jazyka L_C).

Nechť V je větev tabla τ z teorie T. Řekneme, že

- větev V je *dokončená*, je-li sporná, nebo každý výskyt položky na V je redukovaný na V a navíc V obsahuje $T\varphi$ pro každé $\varphi \in T$,
- tablo τ je *dokončené*, pokud je každá jeho větev dokončená.

Systematické tablo - konstrukce

Nechť R je položka a $T = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots\}$ je (konečná či nekonečná) teorie.

(1) Za τ_0 vezmi atomické tablo pro R. V případě $(*)$ vezmi lib. $c \in L_C \setminus L$, v případě $(\sharp)$ za t vezmi term t_1. Dokud to lze, aplikuj následující kroky.

(2) Nechť v je nejlevější vrchol v co nejmenší úrovni již daného tabla τ_n obsahující výskyt položky P, který není redukovaný na nějaké bezesporné větvi skrze v. (Neexistuje-li v, vezmi $\tau'_n = \tau_n$ a jdi na (4).)

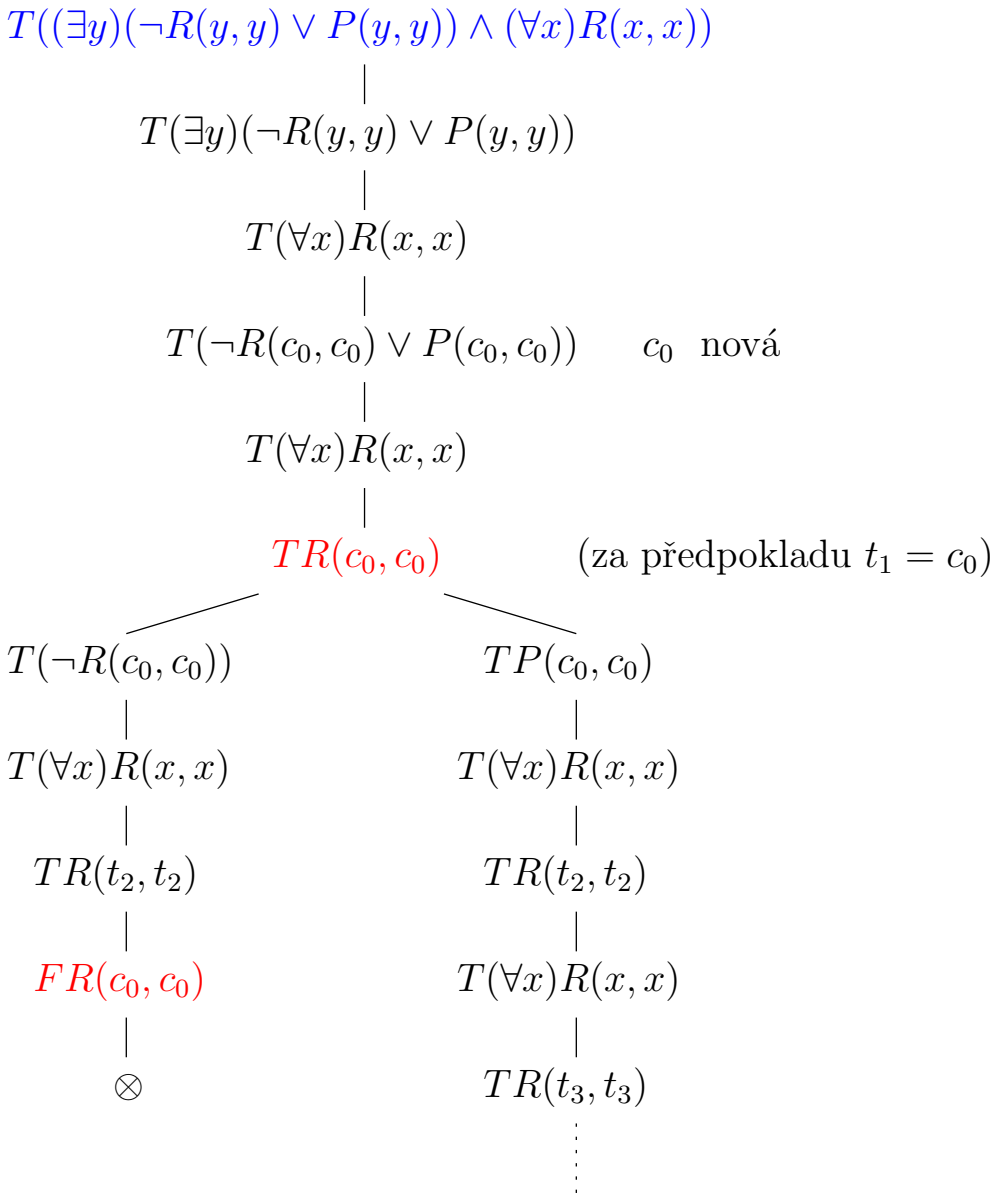
$(3a)$ Není-li P tvaru $T(\forall x)\varphi(x)$ ani $F(\exists x)\varphi(x)$, za τ'_n vezmi tablo vzniklé z τ_n přidáním atomického tabla pro P na každou bezespornou větev skrze v. V případě $(*)$ za c vezmi c_i pro nejmenší možné i.

$(3b)$ Je-li P tvaru $T(\forall x)\varphi(x)$ či $F(\exists x)\varphi(x)$ a ve v má i-tý výskyt, za τ'_n vezmi tablo vzniklé z τ_n připojením atomického tabla pro P na každou bezespornou větev skrze v, přičemž za t vezmi term t_i.

(4) Za τ_{n+1} vezmi tablo vzniklé z τ'_n přidáním $T\varphi_n$ na každou bezespornou větev neobsahující $T\varphi_n$. (Neexistuje-li φ_n, vezmi $\tau_{n+1} = \tau'_n$.)

Systematické tablo z T pro R je výsledkem uvedené konstrukce, tj. $\tau = \cup\tau_n$.

Systematické tablo - příklad



Systematické tablo - dokončenost

Tvrzení *Pro každou teorii T a položku R je systematické tablo τ dokončené.*

Důkaz Nechť $\tau = \cup\tau_n$ je systematické tablo z $T = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots\}$ s R v kořeni a nechť P je položka ve vrcholu v tabla τ.

- Do úrovně v (včetně) je v τ jen konečně mnoho výskytů všech položek.
- Kdyby výskyt P ve v byl neredukovaný na nějaké bezesporné větvi v τ, byl by vybrán v nějakém kroku (2) a zredukován v $(3a)$ či $(3b)$.
- Každá $\varphi_n \in T$ bude dle (4) nejpozději v τ_{n+1} na každé bezesporné větvi.
- Tedy systematické tablo τ obsahuje pouze dokončené větve. □

Tvrzení *Je-li systematické tablo τ důkazem (z teorie T), je τ konečné.*

Důkaz Kdyby bylo τ nekonečné, dle Königova lemmatu by obsahovalo nekonečnou větev. Tato větev by byla bezesporná, neboť při konstrukci τ se sporné větve neprodlužují. Pak by ale τ nebylo sporné. □

Rovnost

Axiomy rovnosti pro jazyk L s rovností jsou

(i) $x = x$

(ii) $x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \rightarrow f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n)$
pro každý n-ární funkční symbol f jazyka L.

(iii) $x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \rightarrow (R(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow R(y_1, \ldots, y_n))$
pro každý n-ární relační symbol R jazyka L včetně $=$.

Tablo důkaz z teorie T jazyka L *s rovností* je tablo důkaz z teorie T^*, kde T^* je rozšíření teorie T o axiomy rovnosti pro L *(resp. jejich generální uzávěry).*

Poznámka *V kontextu logického programování má rovnost často jiný význam než v matematice (identita). Např. v Prologu $t_1 = t_2$ znamená, že t_1 a t_2 jsou unifikovatelné.*

Kongruence a faktorstruktura

Nechť $\sim$ je ekvivalence na A, $f : A^n \to A$ a $R \subseteq A^n$, kde $n \in \mathbb{N}$. Pak $\sim$ je

- *kongruence pro funkci* f, pokud pro každé $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in A$ platí
$$x_1 \sim y_1 \ \wedge \ \cdots \ \wedge \ x_n \sim y_n \quad \Rightarrow \quad f(x_1, \ldots, x_n) \sim f(y_1, \ldots, y_n),$$
- *kongruence pro relaci* R, pokud pro každé $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in A$ platí
$$x_1 \sim y_1 \ \wedge \ \cdots \ \wedge \ x_n \sim y_n \quad \Rightarrow \quad (R(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow R(y_1, \ldots, y_n)).$$

Nechť ekvivalence $\sim$ na A je kongruence pro každou funkci i relaci struktury $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{F}^A, \mathcal{R}^A \rangle$ pro jazyk $L = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$. *Faktorstruktura* (*podílová struktura*) struktury $\mathcal{A}$ dle $\sim$ je struktura $\mathcal{A}/\sim = \langle A/\sim, \mathcal{F}^{A/\sim}, \mathcal{R}^{A/\sim} \rangle$, kde

$$f^{A/\sim}([x_1]_\sim, \ldots, [x_n]_\sim) = [f^A(x_1, \ldots, x_n)]_\sim$$
$$R^{A/\sim}([x_1]_\sim, \ldots, [x_n]_\sim) \Leftrightarrow R^A(x_1, \ldots, x_n)$$

pro každé $f \in \mathcal{F}$, $R \in \mathcal{R}$ a $x_1, \ldots, x_n \in A$, tj. funkce a relace jsou definované z $\mathcal{A}$ pomocí reprezentantů.

Např. $\mathbb{Z}_p$ je faktorstruktura $\mathbb{Z} = \langle \mathbb{Z}, +, -, 0 \rangle$ dle kongruence modulo p.

Význam axiomů rovnosti

Nechť $\mathcal{A}$ je struktura pro jazyk L, ve které je rovnost interpretovaná jako relace $=^A$ splňující axiomy rovnosti, tj. ne nutně identita.

1) Z axiomů (i) a (iii) plyne, že relace $=^A$ je ekvivalence na A.
2) Axiomy (ii) a (iii) vyjadřují, že relace $=^A$ je kongruence pro každou funkci a relaci v $\mathcal{A}$.
3) Je-li $\mathcal{A} \models T^*$, je i $(\mathcal{A}/{=^A}) \models T^*$, kde $\mathcal{A}/{=^A}$ je faktorstruktura struktury $\mathcal{A}$ dle $=^A$, přičemž rovnost je v $\mathcal{A}/{=^A}$ interpretovaná jako identita.

Na druhou stranu, v každém modelu, v kterém je rovnost interpretovaná jako identita, všechny axiomy rovnosti evidentně platí.

Korektnost

Řekneme, že struktura $\mathcal{A}$ se *shoduje s položkou* P, pokud P je $T\varphi$ a $\mathcal{A} \models \varphi$, nebo pokud P je $F\varphi$ a $\mathcal{A} \models \neg\varphi$, tj. $\mathcal{A} \not\models \varphi$. Navíc, $\mathcal{A}$ se *shoduje s větví* V, shoduje-li se s každou položkou na V.

Lemma *Nechť $\mathcal{A}$ je model teorie T jazyka L, který se shoduje s položkou R v kořeni tabla $\tau = \cup\tau_n$ z T. Pak $\mathcal{A}$ lze expandovat do jazyka L_C tak, že se shoduje s nějakou větví V v tablu τ.*

Poznámka *Postačí nám expanze modelu $\mathcal{A}$ o konstanty $c^{\mathcal{A}}$ pro $c \in L_C \setminus L$ vyskytující se na větvi V, ostatní konstanty lze dodefinovat libovolně.*

Důkaz Indukcí dle n nalezneme větev V_n v tablu τ_n a expanzi $\mathcal{A}_n$ modelu $\mathcal{A}$ o konstanty $c^{\mathcal{A}}$ pro $c \in L_C \setminus L$ na V_n tak, že $\mathcal{A}_n$ se shoduje s V_n a $V_{n-1} \subseteq V_n$.

Předpokládejme, že máme větev V_n v τ_n a expanzi $\mathcal{A}_n$ shodující se s V_n.

- Vznikne-li τ_{n+1} z τ_n bez prodloužení V_n, položme $V_{n+1} = V_n$, $\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}_n$.
- Vznikne-li τ_{n+1} z τ_n připojením $T\varphi$ k V_n pro nějaké $\varphi \in T$, nechť V_{n+1} je tato větev a $\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}_n$. Jelikož $\mathcal{A} \models \varphi$, shoduje se $\mathcal{A}_{n+1}$ s V_{n+1}.

Korektnost - důkaz (pokr.)

- Jinak τ_{n+1} vznikne z τ_n prodloužením V_n o atomické tablo nějaké položky P na V_n. Z indukčního předpokladu víme, že $\mathcal{A}_n$ se shoduje s P.

(i) V případě atomického tabla pro spojku položme $\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}_n$ a snadno ověříme, že V_n lze prodloužit na větev V_{n+1} shodující se s $\mathcal{A}_{n+1}$.

(ii) Je-li P tvaru $T(\forall x)\varphi(x)$, nechť V_{n+1} je (jednoznačné) prodloužení V_n na větev v τ_{n+1}, tj. o položku $T\varphi(x/t)$. Nechť $\mathcal{A}_{n+1}$ je libovolná expanze $\mathcal{A}_n$ o nové konstanty z termu t. Jelikož $\mathcal{A}_n \models (\forall x)\varphi(x)$, platí $\mathcal{A}_{n+1} \models \varphi(x/t)$. Obdobně pro P tvaru $F(\exists x)\varphi(x)$.

(iii) Je-li P tvaru $T(\exists x)\varphi(x)$, nechť V_{n+1} je (jednoznačné) prodloužení V_n na větev v τ_{n+1}, tj. o položku $T\varphi(x/c)$. Jelikož $\mathcal{A}_n \models (\exists x)\varphi(x)$, pro nějaké $a \in A$ platí $\mathcal{A}_n \models \varphi(x)[e(x/a)]$ pro každé ohodnocení e. Nechť $\mathcal{A}_{n+1}$ je expanze $\mathcal{A}_n$ o novou konstantu $c^A = a$. Pak $\mathcal{A}_{n+1} \models \varphi(x/c)$.
Obdobně pro P tvaru $F(\forall x)\varphi(x)$.

Základní krok pro $n = 0$ plyne z obdobné analýzy atomických tabel pro položku R v kořeni s využitím předpokladu, že model $\mathcal{A}$ se shoduje s R. □

Věta o korektnosti

Ukážeme, že tablo metoda v predikátové logice je korektní.

Věta *Pro každou teorii T a sentenci φ, je-li φ tablo dokazatelná z T, je φ pravdivá v T, tj.* $T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$.

Důkaz

- Nechť φ je tablo dokazatelná z teorie T, tj. existuje sporné tablo τ z T s položkou $F\varphi$ v kořeni.
- Pro spor předpokládejme, že φ není pravdivá v T, tj. existuje model $\mathcal{A}$ teorie T, ve kterém φ neplatí (protipříklad).
- Jelikož se $\mathcal{A}$ shoduje s položkou $F\varphi$, dle předchozího lemmatu lze $\mathcal{A}$ expandovat do jazyka L_C tak, že se shoduje s nějakou větví v tablu τ.
- To ale není možné, neboť každá větev tabla τ je sporná, tj. obsahuje dvojici $T\psi$, $F\psi$ pro nějakou sentenci ψ. □

Kanonický model

Z bezesporné větve V dokončeného tabla vyrobíme model, který se shoduje s V. Vyjdeme z dostupných syntaktických objektů - konstantních termů.

Nechť V je bezesporná větev dokončeného tabla z teorie T jazyka $L = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$. *Kanonický model* z větve V je L_C-struktura $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{F}^A, \mathcal{R}^A \rangle$, kde

(1) A je množina všech konstantních termů jazyka L_C,

(2) $f^A(t_{i_1}, \ldots, t_{i_n}) = f(t_{i_1}, \ldots, t_{i_n})$
pro každý n-ární funkční symbol $f \in \mathcal{F} \cup (L_C \setminus L)$ a $t_{i_1}, \ldots, t_{i_n} \in A$.

(3) $R^A(t_{i_1}, \ldots, t_{i_n}) \Leftrightarrow TR(t_{i_1}, \ldots, t_{i_n})$ je položka na V
pro každý n-ární relační symbol $R \in \mathcal{R}$ či rovnost a $t_{i_1}, \ldots, t_{i_n} \in A$.

Poznámka *Výraz $f(t_{i_1}, \ldots, t_{i_n})$ na pravé straně v (2) je konstantní term jazyka L_C, tedy prvek z A. Neformálně, pro zdůraznění, že jde o syntaktický objekt*

$$f^A(t_{i_1}, \ldots, t_{i_n}) = \text{“}f(t_{i_1}, \ldots, t_{i_n})\text{”}$$

Kanonický model - příklad

Nechť teorie $T = \{(\forall x)R(f(x))\}$ je jazyka $L = \langle R, f, d\rangle$. Systematické tablo pro $F\neg R(d)$ z T obsahuje jedinou větev V a ta je bezesporná.

Kanonický model $\mathcal{A} = \langle A, R^A, f^A, d^A, c_i^A\rangle_{i\in\mathbb{N}}$ z V je pro jazyk L_C a platí

$$A = \{d, f(d), f(f(d)), \ldots, c_0, f(c_0), f(f(c_0)), \ldots, c_1, f(c_1), f(f(c_1)), \ldots\},$$
$$d^A = d, \quad c_i^A = c_i \text{ pro } i \in \mathbb{N},$$
$$f^A(d) = \text{“}f(d)\text{”}, \quad f^A(f(d)) = \text{“}f(f(d))\text{”}, \quad f^A(f(f(d))) = \text{“}f(f(f(d)))\text{”}, \ \ldots$$
$$R^A = \{d, f(d), f(f(d)), \ldots, f(c_0), f(f(c_0)), \ldots, f(c_1), f(f(c_1)), \ldots\}.$$

Redukt $\mathcal{A}$ na jazyk L je $\mathcal{A}' = \langle A, R^A, f^A, d^A\rangle$.

Výroková a predikátová logika - IX

Petr Gregor

KTIML MFF UK

ZS 2016/2017

Kanonický model s rovností

Je-li jazyk L s rovností, T^* označuje rozšíření T o axiomy rovnosti pro L.

Požadujeme-li, aby rovnost byla interpretovaná jako identita, kanonický model $\mathcal{A}$ z bezesporné větve V dokončeného tabla z T^* musíme faktorizovat dle $=^A$.

Dle definice (3), v modelu $\mathcal{A}$ z V pro relaci $=^A$ platí, že pro každé $t_{i_1}, t_{i_2} \in A$,

$$t_{i_1} =^A t_{i_2} \quad \Leftrightarrow \quad T(t_{i_1} = t_{i_2}) \text{ je položka na } V.$$

Jelikož V je dokončená a obsahuje axiomy rovnosti, relace $=^A$ je ekvivalence na A a navíc kongruence pro všechny funkce a relace v $\mathcal{A}$.

Kanonický model s rovností z větve V je faktorstruktura $\mathcal{A}/=^A$.

Pozorování *Pro každou formuli φ,*

$$\mathcal{A} \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad (\mathcal{A}/=^A) \models \varphi,$$

přičemž v $\mathcal{A}$ je $=$ interpretovaná relací $=^A$, zatímco v $\mathcal{A}/=^A$ jako identita.

Poznámka *$\mathcal{A}$ je (spočetně) nekonečný model, ale $\mathcal{A}/=^A$ může být konečný.*

Kanonický model s rovností - příklad

Nechť $T = \{(\forall x)R(f(x)),\ (\forall x)(x = f(f(x)))\}$ je nad $L = \langle R, f, d\rangle$ s rovností.
Systematické tablo pro $F\neg R(d)$ z T^* obsahuje bezespornou větev V.

V kanonickém modelu $\mathcal{A} = \langle A, R^A, =^A, f^A, d^A, c_i^A\rangle_{i\in\mathbb{N}}$ z V pro relaci $=^A$ platí

$$s =^A t \quad \Leftrightarrow \quad t = f(\cdots(f(s)\cdots) \text{ nebo } s = f(\cdots(f(t)\cdots),$$

kde f je aplikováno $2i$-krát pro nějaké $i \in \mathbb{N}$.

Kanonický model s rovností z V je $\mathcal{B} = (\mathcal{A}/=^A) = \langle A/=^A, R^B, f^B, d^B, c_i^B\rangle_{i\in\mathbb{N}}$

$$(A/=^A) = \{[d]_{=^A}, [f(d)]_{=^A}, [c_0]_{=^A}, [f(c_0)]_{=^A}, [c_1]_{=^A}, [f(c_1)]_{=^A}, \dots\},$$
$$d^B = [d]_{=^A}, \quad c_i^B = [c_i]_{=^A} \text{ pro } i \in \mathbb{N},$$
$$f^B([d]_{=^A}) = [f(d)]_{=^A},\ f^B([f(d)]_{=^A}) = [f(f(d))]_{=^A} = [d]_{=^A},\ \dots$$
$$R^B = (A/=^A).$$

Redukt $\mathcal{B}$ na jazyk L je $\mathcal{B}' = \langle A/=^A, R^B, f^B, d^B\rangle$.

Úplnost

Lemma *Kanonický model $\mathcal{A}$ z bezesporné dok. větve V se shoduje s V.*

Důkaz Indukcí dle struktury sentence vyskytující se v položce na V.

- Pro φ atomickou, je-li $T\varphi$ na V, je $\mathcal{A} \models \varphi$ dle (3). Je-li $F\varphi$ na V, není $T\varphi$ na V, neboť V je bezesporná, a tedy $\mathcal{A} \models \neg\varphi$ dle (3).
- Je-li $T(\varphi \wedge \psi)$ na V, je $T\varphi$ a $T\psi$ na V, neboť V je dokončená. Dle indukčního předpokladu je $\mathcal{A} \models \varphi$ a $\mathcal{A} \models \psi$, tedy $\mathcal{A} \models \varphi \wedge \psi$.
- Je-li $F(\varphi \wedge \psi)$ na V, je $F\varphi$ nebo $F\psi$ na V, neboť V je dokončená. Dle indukčního předpokladu je $\mathcal{A} \models \neg\varphi$ nebo $\mathcal{A} \models \neg\psi$, tedy $\mathcal{A} \models \neg(\varphi \wedge \psi)$.
- Pro ostatní spojky obdobně jako v předchozích dvou případech.
- Je-li $T(\forall x)\varphi(x)$ na V, je $T\varphi(x/t)$ na V pro každé $t \in A$, neboť V je dokončená. Dle indukčního předpokladu je $\mathcal{A} \models \varphi(x/t)$ pro každé $t \in A$, tedy $\mathcal{A} \models (\forall x)\varphi(x)$. Obdobně pro $F(\exists x)\varphi(x)$ na V.
- Je-li $T(\exists x)\varphi(x)$ na V, je $T\varphi(x/c)$ na V pro nějaké $c \in A$, neboť V je dokončená. Dle indukčního předpokladu je $\mathcal{A} \models \varphi(x/c)$, tedy $\mathcal{A} \models (\exists x)\varphi(x)$. Obdobně pro $F(\forall x)\varphi(x)$ na V. $\square$

Věta o úplnosti

Ukážeme, že tablo metoda ve predikátové logice je úplná.

Věta *Pro každou teorii T a sentenci φ, je-li φ pravdivá v T, je φ tablo dokazatelná z T, tj. $T \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$.*

Důkaz Nechť φ je pravdivá v T. Ukážeme, že libovolné dokončené tablo (např. systematické) τ z teorie T s položkou $F\varphi$ v kořeni je sporné.

- Kdyby ne, v tablu τ je nějaká bezesporná větev V.
- Dle předchozího lemmatu existuje struktura $\mathcal{A}$ pro jazyk L_C shodující se s větví V, speciálně s položkou $F\varphi$ v kořeni, tj. $\mathcal{A} \models \neg\varphi$.
- Nechť $\mathcal{A}'$ je redukt struktury $\mathcal{A}$ na původní jazyk L. Platí $\mathcal{A}' \models \neg\varphi$.
- Jelikož větev V je dokončená, obsahuje $T\psi$ pro každé $\psi \in T$.
- Tedy $\mathcal{A}'$ je modelem T (neboť $\mathcal{A}'$ se shoduje s $T\psi$ pro každé $\psi \in T$).
- To je ale ve sporu s tím, že φ platí v každém modelu teorie T.

Tedy tablo τ je důkazem φ z T. □

Vlastnosti teorií

Zavedeme syntaktické varianty již definovaných sémantických pojmů.

Nechť T je teorie jazyka L. Je-li sentence φ dokazatelná z T, řekneme, že φ je *věta* (*teorém*) teorie T. Množinu vět teorie T označme

$$\mathrm{Thm}^L(T) = \{\varphi \in \mathrm{Fm}_L \mid T \vdash \varphi\}.$$

Řekneme, že teorie T je

- *sporná*, jestliže je v T dokazatelný $\bot$ (spor), jinak je *bezesporná*,
- *kompletní*, jestliže není sporná a každá sentence je v ní dokazatelná či zamítnutelná, tj. $T \vdash \varphi$ či $T \vdash \neg\varphi$.
- *extenze* teorie T' jazyka L', jestliže $L' \subseteq L$ a $\mathrm{Thm}^{L'}(T') \subseteq \mathrm{Thm}^L(T)$, o extenzi T teorie T' řekneme, že je *jednoduchá*, pokud $L = L'$, a *konzervativní*, pokud $\mathrm{Thm}^{L'}(T') = \mathrm{Thm}^L(T) \cap \mathrm{Fm}_{L'}$,
- *ekvivalentní* s teorií T', jestliže T je extenzí T' a T' je extenzí T.

Důsledky

Z korektnosti a úplnosti tablo metody vyplývá, že předchozí pojmy se shodují se svými sémantickými variantami.

Důsledek *Pro každou teorii T a sentence φ, ψ jazyka L,*

- $T \vdash \varphi$ *právě když* $T \models \varphi$,
- $\mathrm{Thm}^L(T) = \theta^L(T)$,
- T *je sporná, právě když není splnitelná, tj. nemá model,*
- T *je kompletní, právě když je sémanticky kompletní, tj. má až na elementární ekvivalenci jediný model,*
- $T, \varphi \vdash \psi$ *právě když* $T \vdash \varphi \to \psi$ *(Věta o dedukci).*

Poznámka Větu o dedukci lze dokázat přímo, transformací příslušných tabel.

Existence spočetného modelu a kompaktnost

Věta *Každá bezesporná teorie T spočetného jazyka L bez rovnosti má spočetně nekonečný model.*

Důkaz Nechť τ je systematické tablo z T s $F\bot$ v kořeni. Jelikož je dokončené a obsahuje bezespornou větev V, neboť $\bot$ není dokazatelný z T, existuje kanonický model $\mathcal{A}$ z V. Jelikož se $\mathcal{A}$ shoduje s V, jeho redukt na jazyk L je hledaným spočetně nekonečným modelem T. □

Poznámka *Jde o slabou verzi tzv. Löwenheim-Skolemovy věty. Ve spočetném jazyce s rovností je kanonický model s rovností spočetný.*

Věta *Teorie má model, právě když každá její konečná část má model.*

Důkaz Implikace zleva doprava je zřejmá. Pokud teorie T nemá model, je sporná, tj. je z ní dokazatelný $\bot$ systematickým tablem τ. Jelikož je τ konečné, je $\bot$ dokazatelný z nějaké konečné $T' \subseteq T$, tj. T' nemá model. □

Nestandardní model přirozených čísel

Nechť $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$ je standardní model přirozených čísel.

Označme $\mathrm{Th}(\underline{\mathbb{N}})$ množinu všech pravdivých sentencí v $\underline{\mathbb{N}}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $\underline{n}$ term $S(S(\cdots(S(0)\cdots)$, tzv. *n-tý numerál*, kde S je aplikováno n-krát.

Uvažme následující teorii T, kde c je nový konstantní symbol.

$$T = \mathrm{Th}(\underline{\mathbb{N}}) \cup \{\underline{n} < c \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Pozorování *Každá konečná část teorie T má model.*

Tedy dle věty o kompaktnosti má T model $\mathcal{A}$, jde o nestandardní model přirozených čísel. Každá sentence z $\mathrm{Th}(\underline{\mathbb{N}})$ v něm platí, ale zároveň obsahuje prvek $c^{\mathcal{A}}$ větší než každé $n \in \mathbb{N}$ (tj. hodnota termu $\underline{n}$ v $\mathcal{A}$).

Rozšiřování teorií

Ukážeme, že zavádění nových pojmů má "pomocný charakter".

Tvrzení *Nechť T je teorie jazyka L, T' je teorie jazyka L' a $L \subseteq L'$.*

- (i) *T' je extenze T, právě když redukt $\mathcal{A}$ každého modelu $\mathcal{A}'$ teorie T' na jazyk L je modelem teorie T,*
- (ii) *T' je konzervativní extenze T, je-li T' extenze T a každý model $\mathcal{A}$ teorie T lze expandovat do jazyka L' na model $\mathcal{A}'$ teorie T'.*

Důkaz

$(i)a)$ Je-li T' extenze T a φ libovolný axiom T, pak $T' \models \varphi$. Tedy $\mathcal{A}' \models \varphi$ a rovněž $\mathcal{A} \models \varphi$, z čehož plyne, že $\mathcal{A}$ je modelem T.

$(i)b)$ Je-li $\mathcal{A}$ modelem T a $T \models \varphi$, kde φ je jazyka L, pak $\mathcal{A} \models \varphi$ a rovněž $\mathcal{A}' \models \varphi$. Z toho plyne, že $T' \models \varphi$ a tedy T' je extenze T.

(ii) Je-li $T' \models \varphi$, kde φ je nad L, a $\mathcal{A}$ je model T, pak v nějaké jeho expanzi $\mathcal{A}' \models \varphi$ a tedy $\mathcal{A} \models \varphi$. Z čehož $T \models \varphi$, tj. T' je konzervativní. □

Extenze o definovaný relační symbol

Nechť T je teorie jazyka L, $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ je formule jazyka L ve volných proměnných $x_1, \ldots, x_n$ a L' je rozšíření L o nový n-ární relační symbol R.

Extenze teorie T *o definici* R formulí ψ je teorie T' vzniklá přidáním axiomu

$$R(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \psi(x_1, \ldots, x_n)$$

Pozorování *Každý model teorie T lze jednoznačně expandovat na model T'.*

Důsledek *T' je konzervativní extenze T.*

Tvrzení *Pro každou formuli φ' nad L' existuje φ nad L, t.ž. $T' \models \varphi' \leftrightarrow \varphi$.*

Důkaz Každou podformuli $R(t_1, \ldots, t_n)$ nahradíme za $\psi'(x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n)$, kde ψ' je vhodná varianta ψ zaručující substituovatelnost všech termů. □

Např. symbol $\leq$ lze zavést v jazyce aritmetiky pomocí axiomu

$$x \leq y \leftrightarrow (\exists z)(x + z = y)$$

Extenze o definovaný funkční symbol

Nechť T je teorie jazyka L a pro formuli $\psi(x_1, \ldots, x_n, y)$ jazyka L ve volných proměnných $x_1, \ldots, x_n, y$ platí

$$T \models (\exists y)\psi(x_1, \ldots, x_n, y) \qquad \text{(existence)}$$

$$T \models \psi(x_1, \ldots, x_n, y) \ \wedge \ \psi(x_1, \ldots, x_n, z) \ \rightarrow \ y = z \qquad \text{(jednoznačnost)}$$

Označme L' rozšíření L o nový n-ární funkční symbol f.

Extenze teorie T *o definici* f formulí ψ je teorie T' vzniklá přidáním axiomu

$$f(x_1, \ldots, x_n) = y \ \leftrightarrow \ \psi(x_1, \ldots, x_n, y)$$

Poznámka *Je-li* ψ *tvaru* $t(x_1, \ldots, x_n) = y$*, kde* $x_1, \ldots, x_n$ *jsou proměnné termu* t*, podmínky existence a jednoznačnosti platí.*

Např. binární funkční symbol $-$ *lze zavést pomocí* $+$ *a unárního* $-$ *axiomem*

$$x - y = z \ \leftrightarrow \ x + (-y) = z$$

Extenze o definovaný funkční symbol (pokr.)

Pozorování *Každý model teorie T lze jednoznačně expandovat na model T'.*

Důsledek *T' je konzervativní extenze T.*

Tvrzení *Pro každou formuli φ' nad L' existuje φ nad L, t.ž. $T' \models \varphi' \leftrightarrow \varphi$.*

Důkaz Stačí uvážit φ' s jediným výskytem f. Má-li φ' více výskytů f, lze postup aplikovat induktivně. Označme φ^* formuli vzniklou z φ' nahrazením termu $f(t_1, \ldots, t_n)$ za novou proměnnou z. Za φ vezmeme formuli

$$(\exists z)(\varphi^* \wedge \psi'(x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n, y/z)),$$

kde ψ' je vhodná varianta ψ zaručující substituovatelnost všech termů.

Nechť $\mathcal{A}$ je model T', e je ohodnocení, $a = f^{\mathcal{A}}(t_1, \ldots, t_n)[e]$. Díky oběma podmínkám platí $\mathcal{A} \models \psi'(x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n, y/z)[e]$ právě když $e(z) = a$. Tedy

$$\mathcal{A} \models \varphi[e] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A} \models \varphi^*[e(z/a)] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A} \models \varphi'[e]$$

pro každé ohodnocení e, tj. $\mathcal{A} \models \varphi' \leftrightarrow \varphi$ a tedy $T' \models \varphi' \leftrightarrow \varphi$. $\square$

Extenze o definice

Teorie T' jazyka L' je *extenze* teorie T jazyka L *o definice*, pokud vznikla z T postupnou extenzí o definici relačního či funkčního symbolu.

Důsledek *Nechť T' je extenze teorie T o definice. Pak*

- *každý model teorie T lze jednoznačně expandovat na model T',*
- *T' je konzervativní extenze T,*
- *pro každou formuli φ' nad L' existuje φ nad L taková, že $T' \models \varphi' \leftrightarrow \varphi$.*

Např. v teorii $T = \{(\exists y)(x + y = 0), (x + y = 0) \wedge (x + z = 0) \rightarrow y = z\}$ nad $L = \langle +, 0, \leq \rangle$ s rovností lze zavést $<$ a unární funkční symbol $-$ axiomy

$$-x = y \quad \leftrightarrow \quad x + y = 0$$
$$x < y \quad \leftrightarrow \quad x \leq y \ \wedge \ \neg(x = y)$$

Pak formule $-x < y$ je v této extenzi o definice ekvivalentní formuli

$$(\exists z)((z \leq y \ \wedge \ \neg(z = y)) \ \wedge \ x + z = 0).$$

Výroková a predikátová logika - X

Petr Gregor

KTIML MFF UK

ZS 2016/2017

Ekvisplnitelnost

Ukážeme, že problém splnitelnosti lze redukovat na otevřené teorie.

- Teorie T, T' jsou *ekvisplnitelné*, jestliže T má model $\Leftrightarrow$ T' má model.
- Formule φ je v *prenexním (normálním) tvaru (PNF)*, má-li tvar

$$(Q_1 x_1) \dots (Q_n x_n) \varphi',$$

kde Q_i značí $\forall$ nebo $\exists$, proměnné $x_1, \dots, x_n$ jsou navzájem různé a φ' je otevřená formule, zvaná *otevřené jádro*. $(Q_1 x_1) \dots (Q_n x_n)$ je tzv. *prefix*.

- Speciálně, jsou-li všechny kvantifikátory $\forall$, je φ *univerzální* formule.

K teorii T nalezneme ekvisplnitelnou otevřenou teorii následujícím postupem.

(1) Axiomy teorie T nahradíme za ekvivalentní formule v prenexním tvaru.

(2) Pomocí nových funkčních symbolů je převedeme na ekvisplnitelné univerzální formule, tzv. Skolemovy varianty.

(3) Jejich otevřená jádra budou tvořit hledanou teorii.

Vytýkání kvantifikátorů

Nechť Q značí kvantifikátor $\forall$ nebo $\exists$ a $\overline{Q}$ značí opačný kvantifikátor.

Pro každé formule φ, ψ takové, že x není volná ve formuli ψ,

$$\begin{aligned}
\models \quad & \neg(Qx)\varphi \leftrightarrow (\overline{Q}x)\neg\varphi \\
\models \quad & ((Qx)\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (Qx)(\varphi \wedge \psi) \\
\models \quad & ((Qx)\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (Qx)(\varphi \vee \psi) \\
\models \quad & ((Qx)\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\overline{Q}x)(\varphi \rightarrow \psi) \\
\models \quad & (\psi \rightarrow (Qx)\varphi) \leftrightarrow (Qx)(\psi \rightarrow \varphi)
\end{aligned}$$

Uvedené ekvivalence lze ověřit sémanticky nebo dokázat tablo metodou (*přes generální uzávěr, není-li to sentence*).

Poznámka *Předpoklad, že x není volná ve formuli ψ je v každé ekvivalenci (kromě té první) nutný pro nějaký kvantifikátor Q. Např.*

$$\not\models \quad ((\exists x)P(x) \wedge P(x)) \leftrightarrow (\exists x)(P(x) \wedge P(x))$$

Převod na prenexní tvar

Tvrzení *Nechť φ' je formule vzniklá z formule φ nahrazením některých výskytů podformule ψ za formuli ψ'. Jestliže $T \models \psi \leftrightarrow \psi'$, pak $T \models \varphi \leftrightarrow \varphi'$.*

Důkaz Snadno indukcí dle struktury formule φ. □

Tvrzení *Ke každé formuli φ existuje ekvivalentní formule φ' v prenexním normálním tvaru, tj. $\models \varphi \leftrightarrow \varphi'$.*

Důkaz Indukcí dle struktury φ pomocí vytýkání kvantifikátorů, náhradou podformulí za jejich varianty a využitím předchozího tvrzení o ekvivalenci. □

Např.

$$\begin{aligned}
((\forall z)P(x,z) \wedge P(y,z)) &\rightarrow \neg(\exists x)P(x,y)\\
((\forall u)P(x,u) \wedge P(y,z)) &\rightarrow (\forall x)\neg P(x,y)\\
(\forall u)(P(x,u) \wedge P(y,z)) &\rightarrow (\forall v)\neg P(v,y)\\
(\exists u)((P(x,u) \wedge P(y,z)) &\rightarrow (\forall v)\neg P(v,y))\\
(\exists u)(\forall v)((P(x,u) \wedge P(y,z)) &\rightarrow \neg P(v,y))
\end{aligned}$$

Skolemova varianta

Nechť φ je sentence jazyka L v prenexním normálním tvaru, $y_1, \ldots, y_n$ jsou existenčně kvantifikované proměnné ve φ (v tomto pořadí) a pro každé $i \leq n$ nechť $x_1, \ldots, x_{n_i}$ jsou univerzálně kvantifikované proměnné před y_i. Označme L' rozšíření L o nové n_i-ární funkční symboly f_i pro každé $i \leq n$.

Nechť φ_S je formule jazyka L', jež vznikne z formule φ odstraněním $(\exists y_i)$ z jejího prefixu a nahrazením každého výskytu proměnné y_i za term $f_i(x_1, \ldots, x_{n_i})$. Pak formule φ_S se nazývá *Skolemova varianta* formule φ.

Např. pro formuli φ

$$(\exists y_1)(\forall x_1)(\forall x_2)(\exists y_2)(\forall x_3)R(y_1, x_1, x_2, y_2, x_3)$$

je následují formule φ_S *její Skolemovou variantou*

$$(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)R(f_1, x_1, x_2, f_2(x_1, x_2), x_3),$$

kde f_1 *je nový konstantní symbol a* f_2 *je nový binární funkční symbol.*

Vlastnosti Skolemovy varianty

Lemma *Nechť φ je sentence $(\forall x_1)\dots(\forall x_n)(\exists y)\psi$ jazyka L a φ' je sentence $(\forall x_1)\dots(\forall x_n)\psi(y/f(x_1,\dots,x_n))$, kde f je nový funkční symbol. Pak*

(1) *redukt $\mathcal{A}$ každého modelu $\mathcal{A}'$ formule φ' na jazyk L je modelem φ,*

(2) *každý model $\mathcal{A}$ formule φ lze expandovat na model $\mathcal{A}'$ formule φ'.*

Poznámka *Na rozdíl od extenze o definici funkčního symbolu, expanze v tvrzení (2) tentokrát nemusí být jednoznačná.*

Důkaz (1) Nechť $\mathcal{A}' \models \varphi'$ a $\mathcal{A}$ je redukt $\mathcal{A}'$ na jazyk L. Jelikož pro každé ohodnocení e je $\mathcal{A} \models \psi[e(y/a)]$, kde $a = (f(x_1,\dots,x_n))^{\mathcal{A}'}[e]$, platí $\mathcal{A} \models \varphi$.
(2) Nechť $\mathcal{A} \models \varphi$. Pak existuje funkce $f^A\colon A^n \to A$ taková, že pro každé ohodnocení e platí $\mathcal{A} \models \psi[e(y/a)]$, kde $a = f^A(e(x_1),\dots,e(x_n))$, a tedy expanze $\mathcal{A}'$ struktury $\mathcal{A}$ o funkci f^A je modelem φ'. □

Důsledek *Je-li φ' Skolemova varianta formule φ, obě tvrzení (1) a (2) pro φ, φ' rovněž platí. Tedy φ, φ' jsou ekvisplnitelné.*

Skolemova věta

Věta *Každá teorie T má otevřenou konzervativní extenzi T^*.*

Důkaz Lze předpokládat, že T je v uzavřeném tvaru. Nechť L je její jazyk.

- Nahrazením každého axiomu teorie T za ekvivalentní formuli v prenexním tvaru získáme ekvivalentní teorii T°.
- Nahrazením každého axiomu teorie T° za jeho Skolemovu variantu získáme teorii T' rozšířeného jazyka L'.
- Jelikož je redukt každého modelu teorie T' na jazyk L modelem teorie T, je T' extenze T.
- Jelikož i každý model teorie T lze expandovat na model teorie T', je to extenze konzervativní.
- Jelikož každý axiom teorie T' je univerzální sentence, jejich nahrazením za otevřená jádra získáme otevřenou teorii T^* ekvivalentní s T'. □

Důsledek *Ke každé teorii existuje ekvisplnitelná otevřená teorie.*

Redukce nesplnitelnosti na úroveň VL

Je-li otevřená teorie nesplnitelná, lze to "doložit na konkrétních prvcích".

Např. teorie

$$T = \{P(x,y) \vee R(x,y),\ \neg P(c,y),\ \neg R(x,f(x))\}$$

jazyka $L = \langle P, R, f, c\rangle$ nemá model, což lze doložit nesplnitelnou konjunkcí konečně mnoha instancí (některých) axiomů teorie T v konstantních termech

$$(P(c,f(c)) \vee R(c,f(c))) \ \wedge\ \neg P(c,f(c)) \ \wedge\ \neg R(c,f(c)),$$

což je lživá formule ve tvaru výroku

$$(p \vee r) \ \wedge\ \neg p \ \wedge\ \neg r.$$

Instance $\varphi(x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n)$ otevřené formule φ ve volných proměnných $x_1, \ldots, x_n$ je *základní (ground) instance*, jsou-li všechny termy $t_1, \ldots, t_n$ konstantní. Konstantní termy nazýváme také *základní (ground) termy*.

Herbrandův model

Nechť $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ je jazyk s alespoň jedním konstantním symbolem.
(Je-li třeba, do L přidáme nový konstantní symbol.)

- *Herbrandovo univerzum* pro L je množina všech konstantních termů z L.
  Např. pro $L = \langle P, f, c \rangle$, kde P je relační, f je binární funkční, c konstantní
  $$A = \{c, f(c,c), f(f(c,c),c), f(c,f(c,c)), f(f(c,c),f(c,c)), \dots\}$$
- Struktura $\mathcal{A}$ pro L je *Herbrandova struktura*, je-li doména A Herbrandovo univerzum pro L a pro každý n-ární funkční symbol $f \in \mathcal{F}$ a $t_1, \dots, t_n \in A$,
  $$f^{\mathcal{A}}(t_1, \dots, t_n) = f(t_1, \dots, t_n)$$
  (včetně $n = 0$, tj. $c^{\mathcal{A}} = c$ pro každý konstantní symbol c).
  Poznámka *Na rozdíl od kanonické struktury nejsou předepsané relace.*
  Např. $\mathcal{A} = \langle A, P^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}} \rangle$, kde $P^{\mathcal{A}} = \emptyset$, $c^{\mathcal{A}} = c$ a $f^{\mathcal{A}}(c,c) = f(c,c), \dots$.
- *Herbrandův model* teorie T je Herbrandova struktura, jež je modelem T.

Herbrandova věta

Věta *Nechť T je otevřená teorie jazyka L bez rovnosti a s alespoň jedním konstantním symbolem. Pak*

(a) *T má Herbrandův model, anebo*

(b) *existuje konečně mnoho základních instancí axiomů z T, jejichž konjunkce je nesplnitelná, a tedy T nemá model.*

Důkaz Nechť T' je množina všech základních instancí axiomů z T. Uvažme dokončené (např. systematické) tablo τ z T' v jazyce L (bez přidávání nových konstant) s položkou $F\bot$ v kořeni.

- Obsahuje-li tablo τ bezespornou větev V, kanonický model z větve V je Herbrandovým modelem teorie T.
- Jinak je τ sporné, tj. $T' \vdash \bot$. Navíc je konečné, tedy $\bot$ je dokazatelný jen z konečně mnoha formulí T', tj. jejich konjunkce je nesplnitelná. □

Poznámka *V případě jazyka L s rovností teorii T rozšíříme na T^* o axiomy rovnosti pro L a pokud T^* má Herbrandův model $\mathcal{A}$, zfaktorizujeme ho dle $=^A$.*

Důsledky Herbrandovy věty

Nechť L je jazyk obsahující alespoň jeden konstantní symbol.

Důsledek *Pro každou otevřenou $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ jazyka L je $(\exists x_1) \ldots (\exists x_n)\varphi$ pravdivá, právě když existují konstantní termy t_{ij} jazyka L takové, že*

$$\varphi(x_1/t_{11}, \ldots, x_n/t_{1n}) \vee \ldots \vee \varphi(x_1/t_{m1}, \ldots, x_n/t_{mn})$$

je (výroková) tautologie.

Důkaz $(\exists x_1) \ldots (\exists x_n)\varphi$ je pravdivá $\Leftrightarrow$ $(\forall x_1) \ldots (\forall x_n)\neg\varphi$ je nesplnitelná $\Leftrightarrow$ $\neg\varphi$ je nesplnitelná. Ostatní vyplývá z Herbrandovy věty pro $\neg\varphi$. □

Důsledek *Otevřená teorie T jazyka L má model, právě když teorie T' všech základních instancí axiomů z T má model.*

Důkaz Má-li T model $\mathcal{A}$, platí v něm každá instance každého axiomu z T, tedy $\mathcal{A}$ je modelem T'. Nemá-li T model, dle H. věty existuje (konečně) formulí z T', jejichž konjunkce je nesplnitelná, tedy T' nemá model. □

Rezoluční metoda v PL - úvod

- Zamítací procedura - cílem je ukázat, že daná formule (či teorie) je nesplnitelná.
- Předpokládá otevřené formule v CNF (v množinové reprezentaci).

  Literál je *(tentokrát)* atomická formule nebo její negace.

  Klauzule je konečná množina literálů, $\square$ značí prázdnou klauzuli.

  Formule (v množinové reprezentaci) je množina (i nekonečná) klauzulí.

  Poznámka *Každou formuli (teorii) umíme převést na ekvisplnitelnou otevřenou formuli (teorii) v CNF, tj. na formuli v množinové reprezentaci.*
- Rezoluční pravidlo je obecnější - umožňuje rezolvovat přes literály, které jsou unifikovatelné.
- Rezoluce v PL je založená na rezoluci ve VL a unifikaci.

Lokální význam proměnných

Proměnné v rámci klauzule můžeme přejmenovat.

Nechť φ je *(vstupní)* otevřená formule v CNF.

- Formule φ je splnitelná, právě když její generální uzávěr φ' je splnitelný.
- Pro každé formule ψ, χ a proměnnou x

$$\models \quad (\forall x)(\psi \wedge \chi) \;\leftrightarrow\; (\forall x)\psi \wedge (\forall x)\chi$$

  (i když x je volná v ψ a χ zároveň).
- Každou klauzuli ve φ lze tedy nahradit jejím generálním uzávěrem.
- Uzávěry klauzulí lze variovat (přejmenovat proměnné).

Např. variovaním druhé klauzule v (1) *získáme ekvisplnitelnou formuli* (2).

(1) $\{\{P(x), Q(x,y)\}, \{\neg P(x), \neg Q(y,x)\}\}$

(2) $\{\{P(x), Q(x,y)\}, \{\neg P(v), \neg Q(u,v)\}\}$

Přímá redukce do VL

Herbrandova věta umožňuje následující postup. Je ale značně neefektivní.

- Nechť S je *(vstupní)* formule v množinové reprezentaci.
- Lze předpokládat, že jazyk obsahuje alespoň jeden konstantní symbol.
- Nechť S' je množina všech základních instancí klauzulí z S.
- Zavedením prvovýroků pro každou atomickou sentenci lze S' převést na (případně nekonečnou) výrokovou formuli v množinové reprezentaci.
- Rezolucí na úrovni VL ověříme její nesplnitelnost.

Např. pro $S = \{\{P(x,y), R(x,y)\}, \{\neg P(c,y)\}, \{\neg R(x,f(x))\}\}$ *je*

$$S' = \{\{P(c,c), R(c,c)\}, \{P(c,f(c)), R(c,f(c))\}, \{P(f(c),f(c)), R(f(c),f(c))\} \ldots,$$
$$\{\neg P(c,c)\}, \{\neg P(c,f(c))\}, \ldots, \{\neg R(c,f(c))\}, \{\neg R(f(c),f(f(c)))\}, \ldots\}$$

nesplnitelná, neboť na úrovni VL je

$$S' \supseteq \{\{P(c,f(c)), R(c,f(c))\}, \{\neg P(c,f(c))\}, \{\neg R(c,f(c))\}\} \vdash_R \square.$$

Substituce - příklady

Efektivnější je využívat vhodných substitucí. Např. pro

a) $\{P(x), Q(x,a)\}$, $\{\neg P(y), \neg Q(b,y)\}$ substitucí x/b, y/a dostaneme $\{P(b), Q(b,a)\}$, $\{\neg P(a), \neg Q(b,a)\}$ a z nich rezolucí $\{P(b), \neg P(a)\}$.

Nebo substitucí x/y a rezolucí dle $P(y)$ dostaneme $\{Q(y,a), \neg Q(b,y)\}$.

b) $\{P(x), Q(x,a), Q(b,y)\}$, $\{\neg P(v), \neg Q(u,v)\}$ substituce x/b, y/a, u/b, v/a dává $\{P(b), Q(b,a)\}$, $\{\neg P(a), \neg Q(b,a)\}$ a z nich rezolucí $\{P(b), \neg P(a)\}$.

c) $\{P(x), Q(x,z)\}$, $\{\neg P(y), \neg Q(f(y),y)\}$ substitucí $x/f(z)$, y/z dostaneme $\{P(f(z)), Q(f(z),z)\}$, $\{\neg P(z), \neg Q(f(z),z)\}$ a z nich $\{P(f(z)), \neg P(z)\}$.

Při substituci $x/f(a)$, y/a, z/a dostaneme $\{P(f(a)), Q(f(a),a)\}$, $\{\neg P(a), \neg Q(f(a),a)\}$ a z nich rezolucí $\{P(f(a)), \neg P(a)\}$. Předchozí substituce je ale obecnější.

Substituce

- *Substituce* je (konečná) množina $\sigma = \{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$, kde x_i jsou navzájem různé proměnné a t_i jsou termy, přičemž t_i není x_i.
- Jsou-li všechny termy t_i konstantní, je σ *základní substituce*.
- Jsou-li t_i navzájem různé proměnné, je σ *přejmenování proměnných*.
- *Výraz* je literál nebo term. *(Substituci lze aplikovat na výrazy.)*
- *Instance* výrazu E *při substituci* $\sigma = \{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$ je výraz $E\sigma$ vzniklý z E současným nahrazením všech výskytů proměnných x_i za t_i.
- Pro množinu výrazů S označmě $S\sigma$ množinu instancí $E\sigma$ výrazů E z S.

Poznámka *Jelikož substituce je současná pro všechny proměnné zároveň, případný výskyt proměnné x_i v termu t_j nevede k zřetězení substitucí.*

Např. pro $S = \{P(x), R(y,z)\}$ a substituci $\sigma = \{x/f(y,z), y/x, z/c\}$ je

$$S\sigma = \{P(f(y,z)), R(x,c)\}.$$

Skládání substitucí

Zadefinujeme $\sigma\tau$ *tak, aby* $E(\sigma\tau) = (E\sigma)\tau$ *pro každý výraz* E.

Např. pro $E = P(x, w, u)$, $\sigma = \{x/f(y), w/v\}$, $\tau = \{x/a, y/g(x), v/w, u/c\}$ *je*

$$E\sigma = P(f(y), v, u), \quad (E\sigma)\tau = P(f(g(x)), w, c).$$

Pak by mělo být $\sigma\tau = \{x/f(g(x)), y/g(x), v/w, u/c\}$.

Pro substituce $\sigma = \{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$ a $\tau = \{y_1/s_1, \ldots, y_n/s_n\}$ definujeme

$$\sigma\tau = \{x_i/t_i\tau \mid x_i \in X,\ x_i \text{ není } t_i\tau\} \cup \{y_j/s_j \mid y_j \in Y \setminus X\}$$

složenou substituci σ a τ, kde $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ a $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$.

Poznámka *Skládání substitucí není komutativní, např. pro uvedené* σ *a* τ *je*

$$\tau\sigma = \{x/a, y/g(f(y)), u/c, w/v\} \neq \sigma\tau.$$

Skládání substitucí - vlastnosti

Ukážeme, že definice vyhovuje našemu požadavku a skládání je asociativní.

Tvrzení *Pro každý výraz E a substituce σ, τ, ϱ platí*

(i) $(E\sigma)\tau = E(\sigma\tau)$,

(ii) $(\sigma\tau)\varrho = \sigma(\tau\varrho)$.

Důkaz Nechť $\sigma = \{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$ a $\tau = \{y_1/s_1, \ldots, y_m/s_m\}$. Stačí uvážit případ, kdy E je proměnná, řekněme v.

(i) Je-li v proměnná x_i pro nějaké i, je $v\sigma = t_i$ a $(v\sigma)\tau = t_i\tau$, což je $v(\sigma\tau)$ dle definice $\sigma\tau$. Jinak $v\sigma = v$ a $(v\sigma)\tau = v\tau$.

Je-li v proměnná y_j pro nějaké j, je dále $(v\sigma)\tau = v\tau = s_j$, což je $v(\sigma\tau)$ dle definice $\sigma\tau$. Jinak $(v\sigma)\tau = v\tau = v$ a zároveň $v(\sigma\tau) = v$.

(ii) Opakovaným užitím (i) dostaneme pro každý výraz E,

$$E((\sigma\tau)\varrho) = (E(\sigma\tau))\varrho = ((E\sigma)\tau)\varrho = (E\sigma)(\tau\varrho) = E(\sigma(\tau\varrho)).$$ □

Unifikace

Nechť $S = \{E_1, \ldots, E_n\}$ je (konečná) množina výrazů.

- *Unifikace* pro S je substituce σ taková, že $E_1\sigma = E_2\sigma = \cdots = E_n\sigma$, tj. $S\sigma$ je singleton.
- S je *unifikovatelná*, pokud má unifikaci.
- Unifikace σ pro S je *nejobecnější unifikace (mgu)*, pokud pro každou unifikaci τ pro S existuje substituce λ taková, že $\tau = \sigma\lambda$.

Např. $S = \{P(f(x), y), P(f(a), w)\}$ *je unifikovatelná pomocí nejobecnější* unifikace $\sigma = \{x/a, y/w\}$. Unifikaci $\tau = \{x/a, y/b, w/b\}$ dostaneme jako $\sigma\lambda$ pro $\lambda = \{w/b\}$. τ není mgu, nelze z ní získat unifikaci $\varrho = \{x/a, y/c, w/c\}$.

Pozorování *Jsou-li* σ, τ *různé nejobecnější unifikace pro* S*, liší se pouze přejmenováním proměnných.*

Unifikační algoritmus

Nechť S je (konečná) neprázdná množina výrazů a p je nejlevější pozice, na které se nějaké dva výrazy z S liší. Pak *neshoda* v S je množina $D(S)$ podvýrazů začínajících na pozici p ze všech výrazů v S .

Např. pro $S = \{P(x, y), P(f(x), z), P(z, f(x))\}$ *je* $D(S) = \{x, f(x), z\}$.

Vstup Neprázdná (konečná) množina výrazů S.

Výstup Nejobecnější unifikace σ pro S nebo *"S není unifikovatelná"*.

(0) Nechť $S_0 := S$, $\sigma_0 := \emptyset$, $k := 0$. *(inicializace)*

(1) Je-li S_k singleton, vydej substituci $\sigma = \sigma_0\sigma_1 \cdots \sigma_k$. *(mgu pro S)*

(2) Zjisti, zda v $D(S_k)$ existuje proměnná x a term t neobsahující x.

(3) Pokud ne, vydej *"S není unifikovatelná"*.

(4) Jinak $\sigma_{k+1} := \{x/t\}$, $S_{k+1} := S_k\sigma_{k+1}$, $k := k + 1$ a jdi na (1).

Poznámka *Test výskytu proměnné x v termu t v kroku (2) může být "drahý".*

Unifikační algoritmus - příklad

$$S = \{P(f(y, g(z)), h(b)),\ P(f(h(w), g(a)), t),\ P(f(h(b), g(z)), y)\}$$

1) $S_0 = S$ není singleton a $D(S_0) = \{y, h(w), h(b)\}$ obsahuje term $h(w)$ a proměnnou y nevyskytující se v $h(w)$. Pak $\sigma_1 = \{y/h(w)\}$, $S_1 = S_0\sigma_1$, tj.
$S_1 = \{P(f(h(w), g(z)), h(b)),\ P(f(h(w), g(a)), t),\ P(f(h(b), g(z)), h(w))\}.$

2) $D(S_1) = \{w, b\}$, $\sigma_2 = \{w/b\}$, $S_2 = S_1\sigma_2$, tj.
$S_2 = \{P(f(h(b), g(z)), h(b)),\ P(f(h(b), g(a)), t)\}.$

3) $D(S_2) = \{z, a\}$, $\sigma_3 = \{z/a\}$, $S_3 = S_2\sigma_3$, tj.
$S_3 = \{P(f(h(b), g(a)), h(b)),\ P(f(h(b), g(a)), t)\}.$

4) $D(S_3) = \{h(b), t\}$, $\sigma_4 = \{t/h(b)\}$, $S_4 = S_3\sigma_4$, tj.
$S_4 = \{P(f(h(b), g(a)), h(b))\}.$

5) S_4 je singleton a nejobecnější unifikace pro S je
$\sigma = \{y/h(w)\}\{w/b\}\{z/a\}\{t/h(b)\} = \{y/h(b), w/b, z/a, t/h(b)\}.$

Unifikační algoritmus - korektnost

Tvrzení *Pro každé S unifikační algoritmus vydá po konečně mnoha krocích korektní výsledek, tj. nejobecnější unifikaci σ pro S nebo pozná, že S není unifikovatelná.* $(*)$ *Navíc, pro každou unifikaci τ pro S platí, že $\tau = \sigma\tau$.*

Důkaz V každém kroku eliminuje jednu proměnnou, někdy tedy skončí.

- Skončí-li neúspěchem po k krocích, nelze unifikovat $D(S_k)$, tedy ani S.
- Vydá-li $\sigma = \sigma_0\sigma_1 \cdots \sigma_k$, je σ evidentně unifikace pro S.
- Dokážeme-li, že σ má vlastnost $(*)$, je σ nejobecnější unifikace pro S.

(1) Nechť τ je unifikace pro S. Ukážeme, že $\tau = \sigma_0\sigma_1 \cdots \sigma_i\tau$ pro každé $i \leq k$.

(2) Pro $i = 0$ platí (1). Nechť $\sigma_{i+1} = \{x/t\}$, předpokládejme $\tau = \sigma_0\sigma_1 \cdots \sigma_i\tau$.

(3) Stačí dokázat, že $v\sigma_{i+1}\tau = v\tau$ pro každou proměnnou v.

(4) Pro $v \neq x$ je $v\sigma_{i+1} = v$, tedy platí (3). Jinak $v = x$ a $v\sigma_{i+1} = x\sigma_{i+1} = t$.

(5) Jelikož τ unifikuje $S_i = S\sigma_0\sigma_1 \cdots \sigma_i$ a proměnná x i term t jsou v $D(S_i)$, musí τ unifikovat x a t, tj. $t\tau = x\tau$, jak bylo požadováno pro (3). □

Výroková a predikátová logika - XI

Petr Gregor

KTIML MFF UK

ZS 2016/2017

Obecné rezoluční pravidlo

Nechť klauzule C_1, C_2 neobsahují stejnou proměnnou a jsou ve tvaru

$$C_1 = C_1' \sqcup \{A_1, \ldots, A_n\}, \quad C_2 = C_2' \sqcup \{\neg B_1, \ldots, \neg B_m\},$$

kde $S = \{A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m\}$ lze unifikovat a $n, m \geq 1$. Pak klauzule

$$C = C_1'\sigma \cup C_2'\sigma,$$

kde σ je nejobecnější unifikace pro S, je *rezolventa* klauzulí C_1 a C_2.

Např. v klauzulích $\{P(x), Q(x,z)\}$ *a* $\{\neg P(y), \neg Q(f(y), y)\}$ *lze unifikovat* $S = \{Q(x,z), Q(f(y),y)\}$ pomocí nejobecnější unifikace $\sigma = \{x/f(y), z/y\}$ a získat z nich rezolventu $\{P(f(y)), \neg P(y)\}$.

Poznámka *Podmínce o různých proměnných lze vyhovět přejmenováním proměnných v rámci klauzule. Je to nutné, např. z* $\{\{P(x)\}, \{\neg P(f(x))\}\}$ *lze po přejmenování získat* $\square$, *ale* $\{P(x), P(f(x))\}$ *nelze unifikovat.*

Rezoluční důkaz

Pojmy zavedeme jako ve VL, jen navíc dovolíme přejmenování proměnných.

- *Rezoluční důkaz (odvození)* klauzule C z formule S je konečná posloupnost $C_0, \ldots, C_n = C$ taková, že pro každé $i \leq n$ je $C_i = C'_i\sigma$, kde $C'_i \in S$ a σ je přejmenování proměnných, nebo je C_i rezolventou nějakých dvou předchozích klauzulí (i stejných).
- Klauzule C je (rezolucí) *dokazatelná* z S, psáno $S \vdash_R C$, pokud má rezoluční důkaz z S.
- *Zamítnutí* formule S je rezoluční důkaz $\square$ z S.
- S je (rezolucí) *zamítnutelná*, pokud $S \vdash_R \square$.

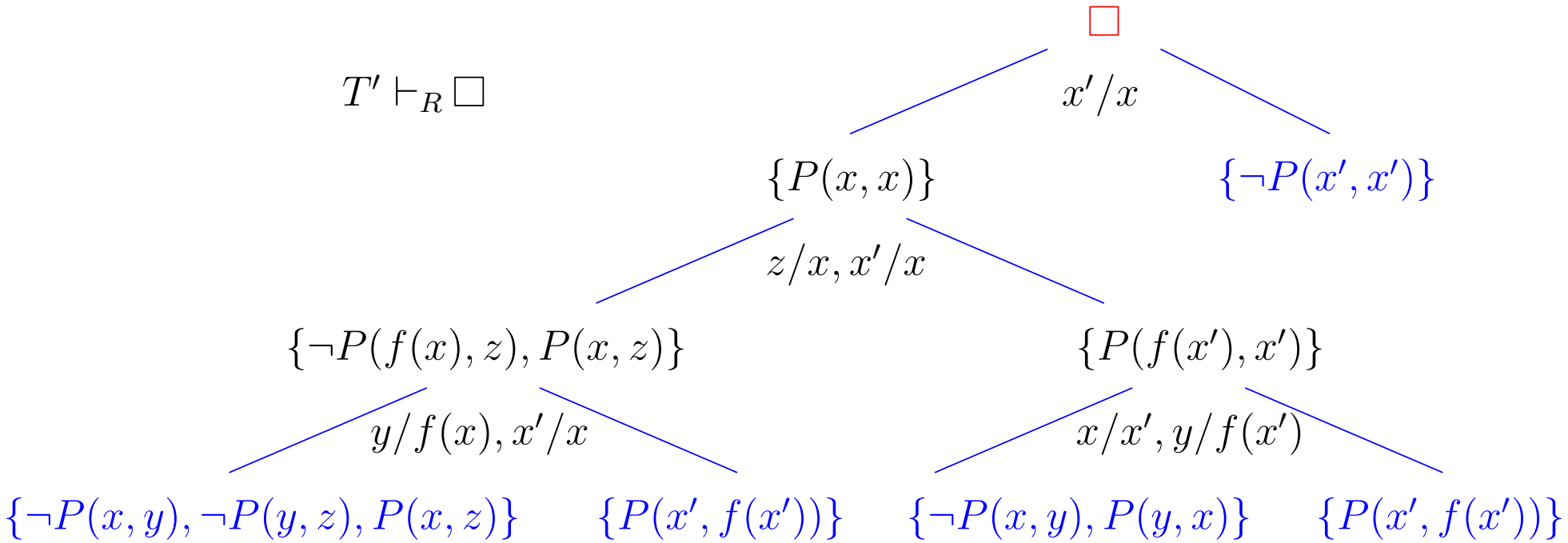
Poznámka *Eliminace více literálů najednou je někdy nezbytná, např.* $S = \{\{P(x), P(y)\}, \{\neg P(x), \neg P(y)\}\}$ *je rezolucí zamítnutelná, ale nemá zamítnutí, při kterém by se v každém kroku eliminoval pouze jeden literál.*

Příklad rezoluce

Mějme teorii $T = \{\neg P(x,x),\ P(x,y) \to P(y,x),\ P(x,y) \wedge P(y,z) \to P(x,z)\}$.

Je $T \models (\exists x)\neg P(x, f(x))$? Tedy, je následující formule T' nesplnitelná?

$T' = \{\{\neg P(x,x)\}, \{\neg P(x,y), P(y,x)\}, \{\neg P(x,y), \neg P(y,z), P(x,z)\}, \{P(x,f(x))\}\}$



Korektnost rezoluce

Nejprve ukážeme, že obecné rezoluční pravidlo je korektní.

Tvrzení Nechť C je rezolventa klauzulí C_1, C_2. Pro každou L-strukturu $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \models C_1 \text{ a } \mathcal{A} \models C_2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A} \models C.$$

Důkaz Nechť $C_1 = C_1' \sqcup \{A_1, \ldots, A_n\}$, $C_2 = C_2' \sqcup \{\neg B_1, \ldots, \neg B_m\}$, σ je nejobecnější unifikace pro $S = \{A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m\}$ a $C = C_1'\sigma \cup C_2'\sigma$.

- Jelikož C_1, C_2 jsou otevřené, platí i $\mathcal{A} \models C_1\sigma$ a $\mathcal{A} \models C_2\sigma$.
- Máme $C_1\sigma = C_1'\sigma \cup \{S\sigma\}$ a $C_2\sigma = C_2'\sigma \cup \{\neg(S\sigma)\}$.
- Ukážeme, že $\mathcal{A} \models C[e]$ pro každé e. Je-li $\mathcal{A} \models S\sigma[e]$, pak $\mathcal{A} \models C_2'\sigma[e]$ a tedy $\mathcal{A} \models C[e]$. Jinak $\mathcal{A} \not\models S\sigma[e]$, pak $\mathcal{A} \models C_1'\sigma[e]$ a tedy $\mathcal{A} \models C[e]$. □

Věta (korektnost) *Je-li formule S rezolucí zamítnutelná, je S nesplnitelná.*

Důkaz Nechť $S \vdash_R \square$. Kdyby $\mathcal{A} \models S$ pro nějakou strukturu $\mathcal{A}$, z korektnosti rezolučního pravidla by platilo i $\mathcal{A} \models \square$, což není možné. ■

Lifting lemma

Rezoluční důkaz na úrovni VL lze "zdvihnout" na úroveň PL.

Lemma *Nechť $C_1^* = C_1\tau_1$, $C_2^* = C_2\tau_2$ jsou základní instance klauzulí C_1, C_2 neobsahující stejnou proměnnou a C^* je rezolventa C_1^* a C_2^*. Pak existuje rezolventa C klauzulí C_1 a C_2 taková, že $C^* = C\tau_1\tau_2$ je základní instance C.*

Důkaz Předpokládejme, že C^* je rezolventa C_1^*, C_2^* přes literál $P(t_1, \ldots, t_k)$.

- Pak lze psát $C_1 = C_1' \sqcup \{A_1, \ldots, A_n\}$ a $C_2 = C_2' \sqcup \{\neg B_1, \ldots, \neg B_m\}$, kde $\{A_1, \ldots, A_n\}\tau_1 = \{P(t_1, \ldots, t_k)\}$ a $\{\neg B_1, \ldots, \neg B_m\}\tau_2 = \{\neg P(t_1, \ldots, t_k)\}$.
- Tedy $(\tau_1\tau_2)$ unifikuje $S = \{A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m\}$ a je-li σ mgu pro S z unifikačního algoritmu, pak $C = C_1'\sigma \cup C_2'\sigma$ je rezolventa C_1 a C_2.
- Navíc $(\tau_1\tau_2) = \sigma(\tau_1\tau_2)$ z vlastnosti $(*)$ pro σ a tedy

$$\begin{aligned} C\tau_1\tau_2 &= (C_1'\sigma \cup C_2'\sigma)\tau_1\tau_2 = C_1'\sigma\tau_1\tau_2 \cup C_2'\sigma\tau_1\tau_2 = C_1'\tau_1 \cup C_2'\tau_2 \\ &= (C_1 \setminus \{A_1, \ldots, A_n\})\tau_1 \cup (C_2 \setminus \{\neg B_1, \ldots, \neg B_m\})\tau_2 \\ &= (C_1^* \setminus \{P(t_1, \ldots, t_k)\}) \cup (C_2^* \setminus \{\neg P(t_1, \ldots, t_k)\}) = C^*. \quad \square \end{aligned}$$

Úplnost

Důsledek *Nechť S' je množina všech základních instancí klauzulí formule S. Je-li $S' \vdash_R C'$ (na úrovni VL), kde C' je základní klauzule, pak existuje klauzule C a základní substituce σ t.ž. $C' = C\sigma$ a $S \vdash_R C$ (na úrovni PL).*

Důkaz Indukcí dle délky rezolučního odvození pomocí lifting lemmatu. □

Věta (úplnost) *Je-li formule S nesplnitelná, je $S \vdash_R \square$.*

Důkaz Je-li S nesplnitelná, dle (důsledku) Herbrandovy věty je nesplnitelná i množina S' všech základních instancí klauzulí z S.

- Dle úplnosti rezoluční metody ve VL je $S' \vdash_R \square$ (na úrovni VL).
- Dle předchozího důsledku existuje klauzule C a substituce σ taková, že $\square = C\sigma$ a $S \vdash_R C$ (na úrovni PL).
- Jediná klauzule, jejíž instance je $\square$, je klauzule $C = \square$. ■

Lineární rezoluce

Stejně jako ve VL, rezoluční metodu lze značně omezit (bez ztráty úplnosti).

- *Lineární důkaz* klauzule C z formule S je konečná posloupnost dvojic $(C_0, B_0), \ldots, (C_n, B_n)$ t.ž. C_0 je varianta klauzule v S a pro každé $i \leq n$
  - $i)$ B_i je varianta klauzule v S nebo $B_i = C_j$ pro nějaké $j < i$, a
  - $ii)$ C_{i+1} je rezolventa C_i a B_i, kde $C_{n+1} = C$.
- C je *lineárně dokazatelná* z S, psáno $S \vdash_L C$, má-li lineární důkaz z S.
- *Lineární zamítnutí* S je lineární důkaz $\square$ z S.
- S je *lineárně zamítnutelná*, pokud $S \vdash_L \square$.

Věta *S je lineárně zamítnutelná, právě když S je nesplnitelná.*

Důkaz $(\Rightarrow)$ Každý lineární důkaz lze transformovat na rezoluční důkaz.
$(\Leftarrow)$ Plyne z úplnosti lineární rezoluce ve VL (nedokazováno), neboť lifting lemma zachovává linearitu odvození. $\square$

LI-rezoluce

Stejně jako ve VL, pro Hornovy formule můžeme lineární rezoluci dál omezit.

- *LI-rezoluce ("linear input")* z formule S je lineární rezoluce z S, ve které je každá boční klauzule B_i variantou klauzule ze (vstupní) formule S.
- Je-li klauzule C dokazatelná LI-rezolucí z S, píšeme $S \vdash_{LI} C$.
- *Hornova formule* je množina (i nekonečná) Hornových klauzulí.
- *Hornova klauzule* je klauzule obsahující nejvýše jeden pozitivní literál.
- *Fakt* je (Hornova) klauzule $\{p\}$, kde p je pozitivní literál.
- *Pravidlo* je (Hornova) klauzule s právě jedním pozitivním a aspoň jedním negativním literálem. Pravidla a fakta jsou *programové klauzule*.
- *Cíl* je neprázdná (Hornova) klauzule bez pozitivního literálu.

Věta *Je-li Hornova T splnitelná a $T \cup \{G\}$ nesplnitelná pro cíl G, lze $\square$ odvodit LI-rezolucí z $T \cup \{G\}$ začínající G.*

Důkaz Plyne z Herbrandovy věty, stejné věty ve VL a lifting lemmatu. $\square$

Program v Prologu

Program (v Prologu) je Hornova formule obsahující pouze programové klauzule, tj. fakta nebo pravidla.

$syn(X,Y) :- otec(Y,X), muz(X).$	$\{syn(X,Y), \neg otec(Y,X), \neg muz(X)\}$
$syn(X,Y) :- matka(Y,X), muz(X).$	$\{syn(X,Y), \neg matka(Y,X), \neg muz(X)\}$
$muz(jan).$	$\{muz(jan)\}$
$otec(jiri,jan).$	$\{otec(jiri,jan)\}$
$matka(julie,jan).$	$\{matka(julie,jan)\}$
$?- syn(jan,X)$ $\quad P \models (\exists X) syn(jan,X)\ ?$	$\{\neg syn(jan,X)\}$

Zajímá nás, zda daný existenční dotaz vyplývá z daného programu.

Důsledek *Pro program P a cíl $G = \{\neg A_1, \ldots, \neg A_n\}$ v proměnných $X_1, \ldots, X_m$*

(1) $P \models (\exists X_1) \ldots (\exists X_m)(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n)$, *právě když*

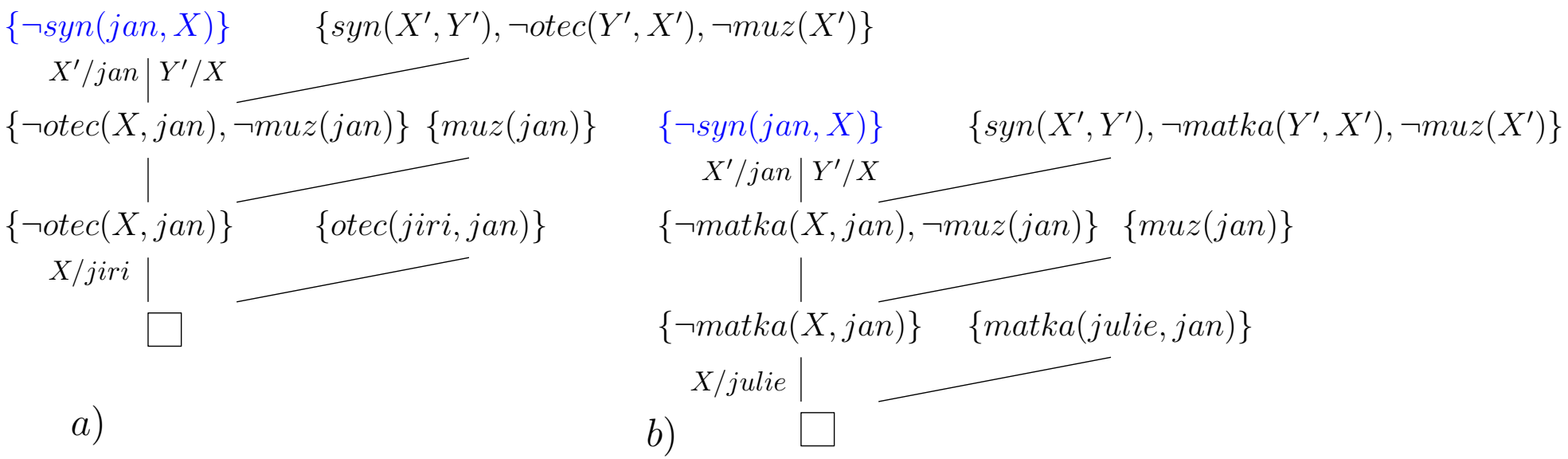
(2) $\square$ *lze odvodit LI-rezolucí z $P \cup \{G\}$ začínající (variantou) cíle G.*

LI-rezoluce nad programem

Je-li odpoveď na dotaz kladná, chceme navíc znát výstupní substituci.

Výstupní substituce σ LI-rezoluce $\square$ z $P \cup \{G\}$ začínající $G = \{\neg A_1, \ldots, \neg A_n\}$ je složení mgu v jednotlivých krocích (jen na proměnné v G). Platí,

$$P \models (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n)\sigma.$$



Výstupní substituce $a)\ X = jiri,\ \ b)\ X = julie$.

Axiomatický přístup

- základní logické spojky a kvantifikátory: $\neg$, $\rightarrow$, $(\forall x)$ (ostatní odvozené)
- dokazují se libovolné formule (nejen sentence)
- *logické axiomy* (schémata logických axiomů)

$$
\begin{array}{lll}
(i) & \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) & \\
(ii) & (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)) & \\
(iii) & (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) & \\
(iv) & (\forall x)\varphi \rightarrow \varphi(x/t) & \text{je-li } t \text{ substituovatelný za } x \text{ do } \varphi \\
(v) & (\forall x)(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\forall x)\psi) & \text{není-li } x \text{ volná proměnná ve } \varphi
\end{array}
$$

kde φ, ψ, χ jsou libovolné formule (daného jazyka), t je libovolný term a x je libovolná proměnná.

- je-li jazyk s rovností, mezi logické axiomy patří navíc axiomy rovnosti
- *odvozovací (deduktivní) pravidla*

$$\frac{\varphi,\ \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$$ (modus ponens), $$\frac{\varphi}{(\forall x)\varphi}$$ (generalizace)

Pojem důkazu

Důkaz (*Hilbertova stylu*) formule φ z teorie T je konečná posloupnost $\varphi_0, \ldots, \varphi_n = \varphi$ formulí taková, že pro každé $i \leq n$

- φ_i je logický axiom nebo $\varphi_i \in T$ (axiom teorie), nebo
- φ_i lze odvodit z předchozích formulí pomocí odvozovacích pravidel.

Formule φ je *dokazatelná* v T, má-li důkaz z T, značíme $T \vdash_H \varphi$.

Věta *Pro každou teorii T a formuli φ, $T \vdash_H \varphi \Rightarrow T \models \varphi$.*

Důkaz

- Je-li $\varphi \in T$ nebo logický axiom, je $T \models \varphi$ (logické axiomy jsou tautologie),
- jestliže $T \models \varphi$ a $T \models \varphi \to \psi$, pak $T \models \psi$, *tj. modus ponens je korektní*,
- jestliže $T \models \varphi$, pak $T \models (\forall x)\varphi$, *tj. pravidlo generalizace je korektní*,
- tedy každá formule vyskytující se v důkazu z T platí v T. □

Poznámka *Platí i úplnost, tj. $T \models \varphi \Rightarrow T \vdash_H \varphi$ pro každou teorii T a formuli φ.*

Teorie struktury

Mnohdy nás zajímá, co platí v jedné konkrétní struktuře.

Teorie struktury $\mathcal{A}$ je množina $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ sentencí (stejného jazyka) platných v $\mathcal{A}$.

Pozorování *Pro každou strukturu $\mathcal{A}$ a teorii T jazyka L,*

- (i) $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ *je kompletní teorie,*
- (ii) *je-li $\mathcal{A} \models T$, je $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ jednoduchá (kompletní) extenze teorie T,*
- (iii) *je-li $\mathcal{A} \models T$ a T je kompletní, je $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ ekvivalentní s T,*
  tj. $\theta^L(T) = \mathrm{Th}(\mathcal{A})$.

Např. pro $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$ je $\mathrm{Th}(\underline{\mathbb{N}})$ je aritmetika přirozených čísel.

Poznámka *Později uvidíme, že ačkoliv je $\mathrm{Th}(\underline{\mathbb{N}})$ kompletní teorie, je (algoritmicky) nerozhodnutelná.*

Elementární ekvivalence

- Struktury $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ jazyka L jsou *elementárně ekvivalentní*, psáno $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, pokud v nich platí stejné formule (jazyka L), tj. $\mathrm{Th}(\mathcal{A}) = \mathrm{Th}(\mathcal{B})$.

  Např. $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle \equiv \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$, *ale* $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \not\equiv \langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$, *neboť v* $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ *má každý prvek bezprostředního následníka, zatímco v* $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ *ne.*

- T je kompletní, právě když má až na el. ekvivalenci právě jeden model.

  Např. teorie $DeLO$ *hustých lineárních uspořádání bez konců je kompletní.*

Zajímá nás, jak vypadají modely dané teorie (až na elementární ekvivalenci).

Pozorování *Pro modely* $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ *teorie* T *platí* $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, *právě když* $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$, $\mathrm{Th}(\mathcal{B})$ *jsou ekvivalentní (jednoduché kompletní extenze teorie* T*).*

Poznámka *Lze-li efektivně (rekurzivně) popsat pro efektivně danou teorii* T*, jak vypadají všechny její kompletní extenze, je* T *(algoritmicky) rozhodnutelná.*

Jednoduché kompletní extenze - příklad

Teorie $DeLO^*$ hustého lineárního uspořádání jazyka $L = \langle \leq \rangle$ s rovností je

$$x \leq x \qquad \text{(reflexivita)}$$
$$x \leq y \ \wedge \ y \leq x \ \rightarrow \ x = y \qquad \text{(antisymetrie)}$$
$$x \leq y \ \wedge \ y \leq z \ \rightarrow \ x \leq z \qquad \text{(tranzitivita)}$$
$$x \leq y \ \vee \ y \leq x \qquad \text{(dichotomie)}$$
$$x < y \ \rightarrow \ (\exists z)\,(x < z \ \wedge \ z < y) \qquad \text{(hustota)}$$
$$(\exists x)(\exists y)(x \neq y) \qquad \text{(netrivialita)}$$

kde '$x < y$' je zkratka za '$x \leq y \ \wedge \ x \neq y$'.

Označme φ, ψ sentence $(\exists x)(\forall y)(x \leq y)$, resp. $(\exists x)(\forall y)(y \leq x)$. Uvidíme, že

$$DeLO = DeLO^* \cup \{\neg\varphi, \neg\psi\}, \qquad DeLO^{\pm} = DeLO^* \cup \{\varphi, \psi\},$$
$$DeLO^{+} = DeLO^* \cup \{\neg\varphi, \psi\}, \qquad DeLO^{-} = DeLO^* \cup \{\varphi, \neg\psi\}$$

jsou všechny (neekvivalentní) jednoduché kompletní extenze teorie $DeLO^*$.

Důsledek věty o spočetném modelu

Pomocí kanonického modelu (s rovností) jsme dříve dokázali následující větu.

Věta *Nechť T je bezesporná teorie spočetného jazyka L. Je-li L bez rovnosti, má T model, který je spočetně nekonečný. Je-li L s rovností, má T model, který je spočetný.*

Důsledek *Ke každé struktuře $\mathcal{A}$ spočetného jazyka bez rovnosti existuje spočetně nekonečná elementárně ekvivalentní struktura $\mathcal{B}$.*

Důkaz Teorie $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ je bezesporná, neboť má model $\mathcal{A}$. Dle předchozí věty má spočetně nek. model $\mathcal{B}$. Jelikož je teorie $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ kompletní, je $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$. □

Důsledek *Ke každé nekonečné struktuře $\mathcal{A}$ spočetného jazyka s rovností existuje spočetně nekonečná elementárně ekvivalentní struktura $\mathcal{B}$.*

Důkaz Obdobně jako výše. Jelikož v $\mathcal{A}$ neplatí sentence *"existuje právě n prvků"* pro žádné $n \in \mathbb{N}$ a $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, není B konečná, tedy je nekonečná. □

Spočetné algebraicky uzavřené těleso

Řekneme, že těleso $\mathcal{A}$ je *algebraicky uzavřené*, pokud v něm každý polynom (nenulového stupně) má kořen, tj. pro každé $n \geq 1$ platí

$$\mathcal{A} \models (\forall x_{n-1}) \dots (\forall x_0)(\exists y)(y^n + x_{n-1} \cdot y^{n-1} + \dots + x_1 \cdot y + x_0 = 0)$$

kde y^k je zkratka za term $y \cdot y \cdot \dots \cdot y$ ($\cdot$ aplikováno $(k-1)$-krát).

Např. těleso $\underline{\mathbb{C}} = \langle \mathbb{C}, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ je algebraicky uzavřené, zatímco tělesa $\underline{\mathbb{R}}$ a $\underline{\mathbb{Q}}$ nejsou (neboť polynom $x^2 + 1$ v nich nemá kořen).

Důsledek *Existuje spočetné algebraicky uzavřené těleso.*

Důkaz Dle předchozího důsledku existuje spočetná struktura (nekonečná), která je elementárně ekvivalentní s tělesem $\underline{\mathbb{C}}$, tedy je to rovněž algebraicky uzavřené těleso. □

Výroková a predikátová logika - XII

Petr Gregor

KTIML MFF UK

ZS 2016/2017

Izomorfismus struktur

Nechť $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ jsou struktury jazyka $L = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$.

- Bijekce $h\colon A \to B$ je *izomorfismus* struktur $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$, pokud platí zároveň

  (i) $h(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n))$
  pro každý n-ární funkční symbol $f \in \mathcal{F}$ a každé $a_1, \ldots, a_n \in A$,

  (ii) $R^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) \quad \Leftrightarrow \quad R^{\mathcal{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n))$
  pro každý n-ární relační symbol $R \in \mathcal{R}$ a každé $a_1, \ldots, a_n \in A$.

- $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ jsou *izomorfní* (via h), psáno $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ ($\mathcal{A} \simeq_h \mathcal{B}$), pokud existuje izomorfismus h struktur $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$. Říkáme rovněž, že $\mathcal{A}$ je *izomorfní s* $\mathcal{B}$.
- *Automorfismus* struktury $\mathcal{A}$ je izomorfismus $\mathcal{A}$ s $\mathcal{A}$.

Např. potenční algebra $\underline{\mathcal{P}(X)} = \langle \mathcal{P}(X), -, \cap, \cup, \emptyset, X \rangle$ *s* $X = n$ *je izomorfní s Booleovou algebrou* $\underline{{}^n 2} = \langle {}^n 2, -_n, \wedge_n, \vee_n, 0_n, 1_n \rangle$ *via* $h : A \mapsto \chi_A$, *kde* χ_A *je charakteristická funkce množiny* $A \subseteq X$.

Izomorfismus a sémantika

Uvidíme, že izomorfismus zachovává sémantiku.

Tvrzení *Nechť $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ jsou struktury jazyka $L = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$. Bijekce $h\colon A \to B$ je izomorfismus $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$, právě když platí zároveň*

(i) $h(t^{\mathcal{A}}[e]) = t^{\mathcal{B}}[he]$ *pro každý term t a $e\colon \mathrm{Var} \to A$,*

(ii) $\mathcal{A} \models \varphi[e] \;\Leftrightarrow\; \mathcal{B} \models \varphi[he]$ *pro každou formuli φ a $e\colon \mathrm{Var} \to A$.*

Důkaz ($\Rightarrow$) Indukcí dle struktury termu t, respektive formule φ.
($\Leftarrow$) Dosazením termu $f(x_1, \ldots, x_n)$ do (i) či atomické formule $R(x_1, \ldots, x_n)$ do (ii) pro ohodnocení $e(x_i) = a_i$ máme, že h vyhovuje def. izomorfismu. □

Důsledek *Pro každé struktury $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ stejného jazyka,*

$$\mathcal{A} \simeq \mathcal{B} \;\Rightarrow\; \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}.$$

Poznámka *Obrácená implikace obecně neplatí, např. $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \equiv \langle \mathbb{R}, \leq \rangle$, ale $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \not\simeq \langle \mathbb{R}, \leq \rangle$, neboť $|\mathbb{Q}| = \omega$ a $|\mathbb{R}| = 2^{\omega}$.*

Konečné modely s rovností

Tvrzení *Pro každé konečné struktury $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ stejného jazyka s rovností,*

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A} \simeq \mathcal{B}.$$

Důkaz Je $|A| = |B|$, neboť lze vyjádřit *"existuje právě n prvků"*.

- Nechť $\mathcal{A}'$ je expanze $\mathcal{A}$ do jazyka $L' = L \cup \{c_a\}_{a \in A}$ o jména prvků z A.
- Ukážeme, že $\mathcal{B}$ lze expandovat na $\mathcal{B}'$ do jazyka L' tak, že $\mathcal{A}' \equiv \mathcal{B}'$. Pak zřejmě $h\colon a \mapsto c_a^{B'}$ je izomorfismus $\mathcal{A}'$ s $\mathcal{B}'$ a tedy i izomorfismus $\mathcal{A}$ s $\mathcal{B}$.
- Stačí ukázat, že pro každé $c_a^{A'} = a \in A$ existuje $b \in B$ t.ž. $\langle \mathcal{A}, a \rangle \equiv \langle \mathcal{B}, b \rangle$.
- Označme Ω množinu formulí $\varphi(x)$ t.ž. $\langle \mathcal{A}, a \rangle \models \varphi(x/c_a)$, tj. $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/a)]$.
- Jelikož je A konečné, existuje konečně formulí $\varphi_0(x), \ldots, \varphi_m(x)$ tak, že pro každé $\varphi \in \Omega$ je $\mathcal{A} \models \varphi \leftrightarrow \varphi_i$ pro nějaké i.
- Jelikož $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A} \models (\exists x) \bigwedge_{i \le m} \varphi_i$, existuje $b \in B$ t.ž. $\mathcal{B} \models \bigwedge_{i \le m} \varphi_i[e(x/b)]$.
- Tedy pro každou $\varphi \in \Omega$ je $\mathcal{B} \models \varphi[e(x/b)]$, tj. $\langle \mathcal{B}, b \rangle \models \varphi(x/c_a)$. □

Důsledek *Má-li kompletní teorie jazyka s rovností konečný model, jsou všechny její modely izomorfní.*

Kategoričnost

- *Izomorfní spektrum* teorie T je počet $I(\kappa, T)$ navzájem neizomorfních modelů teorie T pro každou kardinalitu κ.
- Teorie T je *κ-kategorická*, pokud má až na izomorfismus právě jeden model kardinality κ, tj. $I(\kappa, T) = 1$.

Tvrzení *Teorie $DeLO$ (tj. "bez konců") je ω-kategorická.*

Důkaz Nechť $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models DeLO$ s $A = \{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $B = \{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Indukcí dle n lze nalézt prosté parciální funkce $h_n \subseteq h_{n+1} \subset A \times B$ zachovávající uspořádání tak, že $\{a_i\}_{i<n} \subseteq \mathrm{dom}(h_n)$ a $\{b_i\}_{i<n} \subseteq \mathrm{rng}(h_n)$. Pak $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ via $h = \cup h_n$. □

Obdobně dostaneme, že např. $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$, $\mathcal{A} \restriction (0, 1]$, $\mathcal{A} \restriction [0, 1)$, $\mathcal{A} \restriction [0, 1]$ jsou až na izomorfismus všechny spočetné modely teorie $DeLO^*$. Pak

$$I(\kappa, DeLO^*) = \begin{cases} 0 & \text{pro } \kappa \in \mathbb{N}, \\ 4 & \text{pro } \kappa = \omega. \end{cases}$$

ω-kategorické kritérium kompletnosti

Věta *Nechť jazyk L je spočetný.*

(i) *Je-li teorie T jazyka L bez rovnosti ω-kategorická, je kompletní.*

(ii) *Je-li teorie T jazyka L s rovností ω-kategorická a bez konečného modelu, je kompletní.*

Důkaz Každý model teorie T je elementárně ekvivalentní s nějakým spočetně nekonečným modelem T, ale ten je až na izomorfismus jediný. Tedy všechny modely T jsou elementárně ekvivalentní, tj. T je kompletní. □

Např. teorie $DeLO$, $DeLO^+$, $DeLO^-$, $DeLO^\pm$ jsou kompletní a jsou to všechny (navzájem neekvivalentní) jednoduché kompletní extenze teorie $DeLO^*$.

Poznámka *Obdobné kritérium platí i pro vyšší kardinality než ω.*

Základní algebraické teorie

- *Teorie grup* nad jazykem $L = \langle +, -, 0 \rangle$ s rovností má axiomy

  $x + (y + z) = (x + y) + z$ (asociativita $+$)

  $0 + x = x = x + 0$ (neutralita 0 k $+$)

  $x + (-x) = 0 = (-x) + x$ ($-x$ je inverzní prvek k x)

- *Teorie komutativních grup* má navíc ax. $x + y = y + x$ (komutativita $+$)

- *Teorie okruhů* je jazyka $L = \langle +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ s rovností, má navíc axiomy

  $1 \cdot x = x = x \cdot 1$ (neutralita 1 k $\cdot$)

  $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (asociativita $\cdot$)

  $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$, $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ (distributivita $\cdot$ k $+$)

- *Teorie komutativních okruhů* má navíc ax. $x \cdot y = y \cdot x$ (komutativita $\cdot$)

- *Teorie těles* stejného jazyka má navíc axiomy

  $x \neq 0 \rightarrow (\exists y)(x \cdot y = 1)$ (existence inverzního prvku k $\cdot$)

  $0 \neq 1$ (netrivialita)

Axiomatizovatelnost

Zajímá nás, zda se daná část světa dá "dobře" popsat.

Nechť $K \subseteq M(L)$ je třída struktur jazyka L. Řekneme, že K je

- *axiomatizovatelná*, pokud existuje teorie T jazyka L s $M(T) = K$,
- *konečně axiomatizovatelná*, pokud je axiomatizovatelná konečnou teorií,
- *otevřeně axiomatizovatelná*, pokud je axiomatizovatelná otevřenou teorií,
- teorie T je konečně (otevřeně) axiomatizovatelná, pokud $M(T)$ je konečně (respektive otevřeně) axiomatizovatelná.

Pozorování *Není-li K uzavřená na el. ekvivalenci, není axiomatizovatelná.*

Například

$a)$ *lineární uspořádání jsou konečně i otevřeně axiomatizovatelná,*

$b)$ *tělesa jsou konečně axiomatizovatelná, ale ne otevřeně,*

$c)$ *nekonečné grupy jsou axiomatizovatelné, ale ne konečně.*

Důsledek kompaktnosti

Věta *Má-li teorie T pro každé $n \in \mathbb{N}$ alespoň n-prvkový model, má i nekonečný model.*

Důkaz V jazyce bez rovnosti je to zřejmé, uvažme jazyk s rovností.

- Označme $T' = T \cup \{c_i \neq c_j \mid \text{pro } i \neq j\}$ extenzi teorie T v rozšířeném jazyce o spočetně nekonečně mnoho nových konstantních symbolů c_i.
- Dle předpokladu má každá konečná část teorie T' model.
- Tedy dle věty o kompaktnosti má T' model, ten je nutně nekonečný.
- Jeho redukt na původní jazyk je hledaný nekonečný model teorie T. □

Důsledek *Má-li teorie T pro každé $n \in \mathbb{N}$ alespoň n-prvkový model, není třída všech jejích konečných modelů axiomatizovatelná.*

Např. nelze axiomatizovat konečné grupy, konečná tělesa, atd. Avšak třída nekonečných modelů teorie T jazyka s rovností je axiomatizovatelná.

Konečná axiomatizovatelnost

Věta *Nechť $K \subseteq M(L)$ a $\overline{K} = M(L) \setminus K$, kde L je jazyk. Pak K je konečně axiomatizovatelná, právě když K i $\overline{K}$ jsou axiomatizovatelné.*

Důkaz ($\Rightarrow$) Je-li T konečná axiomatizace K v uzavřeném tvaru, pak teorie s jediným axiomem $\bigvee_{\varphi \in T} \neg\varphi$ axiomatizuje $\overline{K}$. Nyní dokažme ($\Leftarrow$).

- Nechť T, S jsou teorie jazyka L takové, že $M(T) = K$, $M(S) = \overline{K}$.
- Pak $M(T \cup S) = M(T) \cap M(S) = \emptyset$ a dle věty o kompaktnosti existují konečné $T' \subseteq T$ a $S' \subseteq S$ takové, že $\emptyset = M(T' \cup S') = M(T') \cap M(S')$.
- Jelikož
$$M(T) \subseteq M(T') \subseteq \overline{M(S')} \subseteq \overline{M(S)} = M(T),$$
je $M(T) = M(T')$, tj. konečná T' axiomatizuje K. $\square$

Konečná axiomatizovatelnost - příklad

Nechť T je teorie těles. Řekneme, že těleso $\mathcal{A} = \langle A, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ je

- *charakteristiky* 0, neexistuje-li žádné $p \in \mathbb{N}^+$ takové, že $\mathcal{A} \models p1 = 0$, kde $p1$ značí term $1 + 1 + \cdots + 1$ ($+$ aplikováno $(p-1)$-krát).
- *charakteristiky* p, kde p je prvočíslo, je-li p je nejmenší t.ž. $\mathcal{A} \models p1 = 0$.
- Třída těles charakteristiky p pro p prvočíslo je konečně axiomatizována teorií $T \cup \{p1 = 0\}$.
- Třída těles charakteristiky 0 je axiomatizována (nekonečnou) teorií $T' = T \cup \{p1 \neq 0 \mid p \in \mathbb{N}^+\}$.

Tvrzení *Třída K těles charakteristiky 0 není konečně axiomatizovatelná.*

Důkaz Stačí dokázat, že $\overline{K}$ není axiomatizovatelná. Kdyby $M(S) = \overline{K}$, tak $S' = S \cup T'$ má model $\mathcal{B}$, neboť každá konečná $S^* \subseteq S'$ má model (těleso prvočíselné charakteristiky větší než jakékoliv p vyskytující se v axiomech S^*). Pak ale $\mathcal{B} \in M(S) = \overline{K}$ a zároveň $\mathcal{B} \in M(T') = K$, což není možné. □

Otevřená axiomatizovatelnost

Věta *Je-li teorie T otevřeně axiomatizovatelná, pak každá podstruktura modelu T je rovněž modelem T.*

Důkaz Nechť T' je otevřená axiomatika $M(T)$, $\mathcal{A} \models T'$ a $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. Víme, že pro každé $\varphi \in T'$ je $\mathcal{B} \models \varphi$, neboť φ je otevřená. Tedy $\mathcal{B}$ je modelem T'. □

Poznámka *Platí i obrácená implikace, tj. je-li každá podstruktura modelu teorie T rovněž modelem T, pak T je otevřeně axiomatizovatelná.*

Např. teorie $DeLO$ není otevřeně axiomatizovatelná, neboť např. konečná podstruktura modelu $DeLO$ není modelem $DeLO$.

Např. nejvýše n-prvkové grupy pro pevné $n > 1$ jsou otevřeně axiomatizovány

$$T \cup \{ \bigvee_{\substack{i,j \leq n \\ i \neq j}} x_i = x_j \},$$

kde T je (otevřená) teorie grup.

Definovatelné množiny

Zajímá nás, které množiny lze v dané struktuře zadefinovat.

- *Množina definovaná formulí* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *ve struktuře* $\mathcal{A}$ je množina

$$\varphi^{\mathcal{A}}(x_1, \ldots, x_n) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in A^n \mid \mathcal{A} \models \varphi[e(x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n)]\}.$$

  Zkráceným zápisem, $\varphi^{\mathcal{A}}(\overline{x}) = \{\overline{a} \in A^{|\overline{x}|} \mid \mathcal{A} \models \varphi[e(\overline{x}/\overline{a})]\}$, kde $|\overline{x}| = n$.

- *Množina definovaná formulí* $\varphi(\overline{x}, \overline{y})$ *s parametry* $\overline{b} \in A^{|\overline{y}|}$ *ve struktuře* $\mathcal{A}$ je

$$\varphi^{\mathcal{A},\overline{b}}(\overline{x}, \overline{y}) = \{\overline{a} \in A^{|\overline{x}|} \mid \mathcal{A} \models \varphi[e(\overline{x}/\overline{a}, \overline{y}/\overline{b})]\}.$$

  Např. pro $\varphi = E(x, y)$ *je* $\varphi^{\mathcal{G},b}(x, y)$ *množina sousedů vrcholu* b *v grafu* $\mathcal{G}$.

- Pro strukturu $\mathcal{A}$, množinu $B \subseteq A$ a $n \in \mathbb{N}$ označme $\mathrm{Df}^n(\mathcal{A}, B)$ třídu všech množin $D \subseteq A^n$ definovatelných ve struktuře $\mathcal{A}$ s parametry z B.

Pozorování $\mathrm{Df}^n(\mathcal{A}, B)$ *je uzavřená na doplněk, sjednocení, průnik a obsahuje* $\emptyset$, A^n. *Tedy tvoří podalgebru potenční algebry* $\underline{\mathcal{P}}(A^n)$.

Definovatelnost a automorfismy

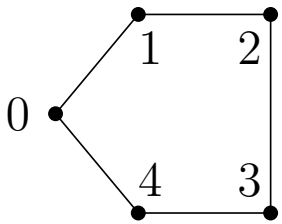
Ukážeme, že definovatelné množiny jsou invariantní vůči automorfismům.

Tvrzení *Nechť $D \subseteq A^n$ je množina definovatelná ve struktuře $\mathcal{A}$ z parametrů $\overline{b}$ a h je automorfismus $\mathcal{A}$, který je identický na $\overline{b}$. Pak $h[D] = D$.*

Důkaz Nechť $D = \varphi^{\mathcal{A},\overline{b}}(\overline{x},\overline{y})$. Pak pro každé $\overline{a} \in A^{|\overline{x}|}$

$$\overline{a} \in D \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[e(\overline{x}/\overline{a},\overline{y}/\overline{b})] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[he(\overline{x}/\overline{a},\overline{y}/\overline{b})]$$
$$\Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[e(\overline{x}/h\overline{a},\overline{y}/h\overline{b})] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[e(\overline{x}/h\overline{a},\overline{y}/\overline{b})] \Leftrightarrow h\overline{a} \in D. \quad \square$$

Např. graf $\mathcal{G}$ má právě jeden netriv. automorfismus h zachovávající vrchol 0.



$$h(0) = 0,\ h(1) = 4,\ h(2) = 3,\ h(3) = 2,\ h(4) = 1$$
$$\{0\} = (x = y)^{\mathcal{G},0},\ \{1,4\} = (E(x,y))^{\mathcal{G},0},\ \{2,3\} = (x \neq y \wedge \neg E(x,y))^{\mathcal{G},0}$$

Navíc množiny $\{0\}, \{1,4\}, \{2,3\}$ jsou definovatelné z parametru 0. Tedy

$$\mathrm{Df}^1(\mathcal{G},\{0\}) = \{\emptyset,\{0\},\{1,4\},\{2,3\},\{0,1,4\},\{0,2,3\},\{1,4,2,3\},\{0,1,2,3,4\}\}.$$

Výroková a predikátová logika - XIII

Petr Gregor

KTIML MFF UK

ZS 2016/2017

Rekurzivní a rekurzivně spočetné množiny

Které problémy jsou algoritmicky řešitelné?

- Intuitivní pojem *"algoritmus"* lze přesně formalizovat (např. pomocí TS).
- Při vhodném kódování přirozenými čísly problém reprezentujeme jako množinu kódů vstupů, na které je odpověď `ano` (kladné instance). Např.

$$SAT = \{\lceil\varphi\rceil \mid \varphi \text{ je splnitelný výrok v CNF}\}.$$

- Množina $A \subseteq \mathbb{N}$ je *rekurzivní*, pokud existuje algoritmus, který pro každý vstup $x \in \mathbb{N}$ skončí a zjistí zda $x \in A$ (výstup `ano/ne`). Říkáme, že takový algoritmus rozhoduje, zda $x \in A$.
- Množina $A \subseteq \mathbb{N}$ je *rekurzivně spočetná* (*r. s.*), pokud existuje algoritmus, který pro každý vstup $x \in \mathbb{N}$ skončí, právě když $x \in A$. Říkáme, že takový algoritmus rozpoznává, že $x \in A$. Ekvivalentně, A je r. s. pokud existuje algoritmus, který na výstup postupně generuje všechny prvky A.

Pozorování *Pro každé $A \subseteq \mathbb{N}$ platí, že A je rekurzivní $\Leftrightarrow$ A, $\overline{A}$ jsou r. s.*

Rozhodnutelné teorie

Dá se pravdivost sentence v dané teorii algoritmicky rozhodovat?.

Předpokládáme (vždy), že jazyk L je rekurzivní. Teorie T nad L je *rozhodnutelná*, je-li $Thm(T)$ rekurzivní, jinak je *nerozhodnutelná*.

Tvrzení *Pro každou teorii T jazyka L s rekurzivně spočetnou axiomatikou,*

(i) *$Thm(T)$ je rekurzivně spočetná,*

(ii) *je-li navíc T kompletní, je $Thm(T)$ rekurzivní, t.j. T je rozhodnutelná.*

Důkaz Konstrukce systematického tabla z T s $F\varphi$ v kořeni předpokládá danou enumeraci axiomů T. Má-li T r. s. axiomatiku, je možné ji poskytnout algoritmicky. Pak konstrukce dává algoritmus, který rozpoznává $T \vdash \varphi$.

Je-li navíc T kompletní, pak pro každou sentenci φ platí $T \nvdash \varphi \Leftrightarrow T \vdash \neg\varphi$. Tedy paralelní konstrukce systematických tabel z T s $F\varphi$ resp. $T\varphi$ v kořeni poskytuje algoritmus pro rozhodování, zda $T \vdash \varphi$. □

Rekurzivně spočetná kompletace

Co když efektivně popíšeme všechny jednoduché kompletní extenze?

Řekneme, že množina všech (až na ekvivalenci) jednoduchých kompletních extenzí teorie T je *rekurzivně spočetná*, existuje-li algoritmus $\alpha(i, j)$, který generuje i-tý axiom j-té extenze (při nějakém očíslování), případně oznámí, že (takový axiom či extenze) neexistuje.

Tvrzení *Má-li teorie T rekurzivně spočetnou axiomatiku a množina všech (až na ekvivalenci) jejích jednoduchých kompletních extenzí je rekurzivně spočetná, je T rozhodnutelná.*

Důkaz Díky r. s. axiomatice poskytuje konstrukce systematického tabla z T s $F\varphi$ v kořeni algoritmus pro rozpoznání $T \vdash \varphi$. Pokud ale $T \nvdash \varphi$, pak $T' \vdash \neg\varphi$ v nějaké jednoduché kompletní extenzi T' teorie T. To lze rozpoznat paralelní postupnou konstrukcí systematických tabel pro $T\varphi$ z jednotlivých extenzí. V i-tém stupni se sestrojí tabla do i kroků pro prvních i extenzí. □

Příklady rozhodnutelných teorií

Následující teorie jsou rozhodnutelné, ačkoliv jsou nekompletní.

- teorie čisté rovnosti; bez axiomů v jazyce $L = \langle\rangle$ s rovností,
- teorie unárního predikátu; bez axiomů v jazyce $L = \langle U \rangle$ s rovností, kde U je unární relační symbol,
- teorie hustých lineárních uspořádání $DeLO^*$,
- teorie algebraicky uzavřených těles v jazyce $L = \langle +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ s rovností, s axiomy teorie těles a navíc axiomy pro každé $n \geq 1$,

  $$(\forall x_{n-1}) \ldots (\forall x_0)(\exists y)(y^n + x_{n-1} \cdot y^{n-1} + \cdots + x_1 \cdot y + x_0 = 0),$$

  kde y^k je zkratka za term $y \cdot y \cdot \cdots \cdot y$ ($\cdot$ aplikováno $(k-1)$-krát).
- teorie komutativních grup,
- teorie Booleových algeber.

Rekurzivní axiomatizovatelnost

Dají se matematické struktury "efektivně" popsat?

- Třída $K \subseteq M(L)$ je *rekurzivně axiomatizovatelná*, pokud existuje teorie T jazyka L s rekurzivní axiomatikou a $M(T) = K$.
- Teorie T je rekurzivně axiomatizovatelná, pokud $M(T)$ je rekurzivně axiomatizovatelná.

Tvrzení *Pro každou konečnou strukturu $\mathcal{A}$ v konečném jazyce s rovností je $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ rekurzivně axiomatizovatelná. Tedy, $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ je rozhodnutelná.*

Důkaz Nechť $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Teorii $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ axiomatizujeme jednou sentencí (tedy rekurzivně) kompletně popisující $\mathcal{A}$. Bude tvaru *"existuje právě n prvků $a_1, \ldots, a_n$ splňujících právě ty základní vztahy o funkčních hodnotách a relacích, které platí ve struktuře $\mathcal{A}$."* □

Příklady rekurzivní axiomatizovatelnosti

Následující struktury $\mathcal{A}$ mají rekurzivně axiomatizovatelnou teorii $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$.

- $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$, teorií diskrétních lineárních uspořádání,
- $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$, teorií hustých lineárních uspořádání bez konců ($DeLO$),
- $\langle \mathbb{N}, S, 0 \rangle$, teorií následníka s nulou,
- $\langle \mathbb{N}, S, +, 0 \rangle$, tzv. Presburgerovou aritmetikou,
- $\langle \mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$, teorií reálně uzavřených těles,
- $\langle \mathbb{C}, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$, teorií algebraicky uzavřených těles charakteristiky 0.

Důsledek *Pro uvedené struktury je* $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ *rozhodnutelná.*

Poznámka *Uvidíme, že ale* $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$ *rekurzivně axiomatizovat nelze. (Vyplývá to z první Gödelovy věty o neúplnosti).*

Robinsonova aritmetika

Jak efektivně a přitom co nejúplněji axiomatizovat $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$*?*

Jazyk aritmetiky je $L = \langle S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$ s rovností.

Robinsonova aritmetika Q má axiomy (konečně mnoho)

$$S(x) \neq 0 \qquad x \cdot 0 = 0$$
$$S(x) = S(y) \to x = y \qquad x \cdot S(y) = x \cdot y + x$$
$$x + 0 = x \qquad x \neq 0 \to (\exists y)(x = S(y))$$
$$x + S(y) = S(x + y) \qquad x \leq y \leftrightarrow (\exists z)(z + x = y)$$

Poznámka Q *je velmi slabá, např. nedokazuje komutativitu či asociativitu operací* $+, \cdot$ *ani tranzitivitu* $\leq$*. Nicméně postačuje například k důkazu existenčních tvrzení o numerálech, která jsou pravdivá v* $\underline{\mathbb{N}}$*.*

Např. pro $\varphi(x, y)$ *tvaru* $(\exists z)(x + z = y)$ *je*

$$Q \vdash \varphi(\underline{1}, \underline{2}), \quad \text{kde } \underline{1} = S(0) \text{ a } \underline{2} = S(S(0)).$$

Peanova aritmetika

Peanova aritmetika PA má axiomy

(a) Robinsonovy aritmetiky Q,

(b) schéma indukce, tj. pro každou formuli $\varphi(x, \overline{y})$ jazyka L axiom

$$(\varphi(0, \overline{y}) \wedge (\forall x)(\varphi(x, \overline{y}) \to \varphi(S(x), \overline{y}))) \to (\forall x)\varphi(x, \overline{y}).$$

Poznámka *PA je poměrně dobrou aproximací $\mathrm{Th}(\underline{\mathbb{N}})$, dokazuje všechny základní vlastnosti platné v $\underline{\mathbb{N}}$ (např. komutativitu $+$). Na druhou stranu existují sentence pravdivé v $\underline{\mathbb{N}}$ ale nezávislé v PA.*

Poznámka *V jazyce 2. řádu lze axiomatizovat $\underline{\mathbb{N}}$ (až na izomorfismus), vezmeme-li místo schéma indukce přímo axiom indukce (2. řádu)*

$$(\forall X)\ ((X(0) \wedge (\forall x)(X(x) \to X(S(x)))) \to (\forall x)\ X(x)).$$

Hilbertův 10. problém

- Nechť $p(x_1, \ldots, x_n)$ je polynom s celočíselnými koeficienty.
  Má *Diofantická rovnice* $p(x_1, \ldots, x_n) = 0$ celočíselné řešení?
- Hilbert (1900) *"Nalezněte algoritmus, který po konečně mnoha krocích určí, zda daná Diofantická rovnice s libovolným počtem proměnných a celočíselnými koeficienty má celočíselné řešení."*

Poznámka *Ekvivalentně lze požadovat algoritmus rozhodující, zda existuje řešení v přirozených číslech.*

Věta (DPRM, 1970) *Problém existence celočíselného řešení dané Diofantické rovnice s celočíselnými koeficienty je alg. nerozhodnutelný.*

Důsledek *Neexistuje algoritmus rozhodující pro dané polynomy* $p(x_1, \ldots, x_n)$, $q(x_1, \ldots, x_n)$ *s přirozenými koeficienty, zda*

$$\mathbb{N} \models (\exists x_1) \ldots (\exists x_n)(p(x_1, \ldots, x_n) = q(x_1, \ldots, x_n)).$$

Nerozhodutelnost predikátové logiky

Existuje algoritmus, rozhodující o dané sentenci, zda je logicky pravdivá?

- Víme, že Robinsonova aritmetika Q má konečně axiomů, má za model $\mathbb{N}$ a stačí k důkazu existenčních tvrzení o numerálech, která platí v $\mathbb{N}$.
- Přesněji, pro každou existenční formuli $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ jazyka aritmetiky

$$Q \vdash \varphi(x_1/\underline{a_1}, \ldots, x_n/\underline{a_n}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{N} \models \varphi[e(x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n)]$$

  pro každé $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$, kde $\underline{a_i}$ značí a_i-tý numerál.
- Speciálně, pro φ tvaru $(\exists x_1) \ldots (\exists x_n)(p(x_1, \ldots, x_n) = q(x_1, \ldots, x_n))$, kde p, q jsou polynomy s přirozenými koeficienty (numerály), platí

$$\mathbb{N} \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad Q \vdash \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \vdash \psi \to \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \models \psi \to \varphi,$$

  kde ψ je konjunkce (uzávěrů) všech axiomů Q.
- Tedy, pokud by existoval algoritmus rozhodující logickou pravdivost, existoval by i algoritmus rozhodující, zda $\mathbb{N} \models \varphi$, což není možné.

Gödelova 1. věta o neúplnosti

Věta (Gödel) *Pro každou bezespornou rekurzivně axiomatizovanou extenzi T Robinsonovy aritmetiky existuje sentence pravdivá v $\underline{\mathbb{N}}$ a nedokazatelná v T.*

Poznámky

- *"Rekurzivně axiomatizovaná" znamená, že je "efektivně zadaná".*
- *"Extenze R. aritmetiky" znamená, že je "základní aritmetické síly".*
- *Je-li navíc $\underline{\mathbb{N}} \models T$, je teorie T nekompletní.*
- *V důkazu sestrojená sentence vyjadřuje "nejsem dokazatelná v T".*
- *Důkaz je založen na dvou principech:*

  (a) *aritmetizaci syntaxe,*

  (b) *self-referenci.*

Aritmetizace - predikát dokazatelnosti

- Konečné objekty syntaxe (symboly jazyka, termy, formule, konečná tabla, tablo důkazy) lze vhodně zakódovat přirozenými čísly.
- Nechť $\ulcorner\varphi\urcorner$ značí kód formule φ a nechť $\underline{\varphi}$ značí numerál (term jazyka aritmetiky) reprezentující $\ulcorner\varphi\urcorner$.
- Je-li T rekurzivně axiomatizovaná, je relace $\mathrm{Prf}_T \subseteq \mathbb{N}^2$ rekurzivní.

$$\mathrm{Prf}_T(x, y) \quad \Leftrightarrow \quad \textit{(tablo) } y \textit{ je důkazem (sentence) } x \textit{ v } T.$$

- Je-li T navíc extenze Robinsonovy aritmetiky Q, dá se dokázat, že Prf_T je reprezentovatelná nějakou formulí $Prf_T(x, y)$ tak, že pro každé $x, y \in \mathbb{N}$

$$Q \vdash Prf_T(\underline{x}, \underline{y}), \quad \textit{je-li} \quad \mathrm{Prf}_T(x, y),$$
$$Q \vdash \neg Prf_T(\underline{x}, \underline{y}), \quad \textit{jinak.}$$

- $Prf_T(x, y)$ vyjadřuje *"y je důkaz x v T"*.
- $(\exists y) Prf_T(x, y)$ vyjadřuje *"x je dokazatelná v T"*.
- Je-li $T \vdash \varphi$, pak $\mathbb{N} \models (\exists y) Prf_T(\underline{\varphi}, y)$ a navíc $T \vdash (\exists y) Prf_T(\underline{\varphi}, y)$.

Princip self-reference

- *Tato věta má 16 písmen.*

  Self-reference ve formálních systémech většinou není přímo k dispozici.

- *Následující věta má 24 písmen “Následující věta má 24 písmen”.*

  Přímá reference obvykle je k dispozici, stačí, když umíme “mluvit” o posloupnostech symbolů. Uvedená věta ale není self-referenční.

- *Následující věta zapsaná jednou a ještě jednou v uvozovkách má 116 písmen “Následující věta zapsaná jednou a ještě jednou v uvozovkách má 116 písmen”.*

  Pomocí přímé reference lze dosáhnout self-reference. Namísto *“má x písmen”* může být jiná vlastnost.

- `main(){char *c="main(){char *c=%c%s%c; printf(c,34, c,34);}"; printf(c,34,c,34);}`

Věta o pevném bodě

Věta *Nechť T je bezesporné rozšíření Robinsonovy aritmetiky. Pro každou formuli $\varphi(x)$ jazyka teorie T existuje sentence ψ taková, že $T \vdash \psi \leftrightarrow \varphi(\underline{\psi})$.*

Poznámka *Sentence ψ je self-referenční, říká "splňuji podmínku φ".*

Důkaz (idea) Uvažme *zdvojující* funkci d takovou, že pro každou formuli $\chi(x)$

$$d(\lceil\chi(x)\rceil) = \lceil\chi(\underline{\chi(x)})\rceil$$

- Platí, že d je reprezentovatelná v T. Předpokládejme *(pro jednoduchost)*, že nějakým termem, který si označme d, stejně jako funkci d.
- Pak pro každou formuli $\chi(x)$ jazyka teorie T platí

$$T \vdash d(\underline{\chi(x)}) = \underline{\chi(\underline{\chi(x)})} \tag{1}$$

- Za ψ vezměme sentenci $\varphi(d(\underline{\varphi(d(x))}))$. Stačí ověřit $T \vdash d(\underline{\varphi(d(x))}) = \underline{\psi}$.
- To plyne z (1) pro $\chi(x)$ tvaru $\varphi(d(x))$, neboť v tom případě

$$T \vdash d(\underline{\varphi(d(x))}) = \underline{\varphi(d(\underline{\varphi(d(x))}))} \quad \square$$

Nedefinovatelnost pravdy

Řekneme, že formule $\tau(x)$ *definuje pravdu* v aritmetické teorii T, pokud pro každou sentenci φ platí $T \vdash \varphi \leftrightarrow \tau(\underline{\varphi})$.

Věta *V žádném bezesporném rozšíření Robinsonovy aritmetiky neexistuje definice pravdy.*

Důkaz Dle věty o pevném bodě pro $\neg\tau(x)$ existuje sentence φ taková, že

$$T \vdash \varphi \leftrightarrow \neg\tau(\underline{\varphi}).$$

Kdyby formule $\tau(x)$ definovala pravdu v T, bylo by

$$T \vdash \varphi \leftrightarrow \neg\varphi,$$

což v bezesporné teorii není možné. □

Poznámka *Důkaz je založen na paradoxu lháře, sentence φ by vyjadřovala "nejsem pravdivá v T".*

Důkaz 1. věty o neúplnosti

Věta (Gödel) *Pro každou bezespornou rekurzivně axiomatizovanou extenzi T Robinsonovy aritmetiky existuje sentence pravdivá v $\underline{\mathbb{N}}$ a nedokazatelná v T.*

Důkaz Nechť $\varphi(x)$ je $\neg(\exists y)Prf_T(x,y)$, vyjadřuje *"$x$ není dokazatelná v T"*.

- Dle věty o pevném bodě pro $\varphi(x)$ existuje sentence ψ_T taková, že

$$T \vdash \psi_T \leftrightarrow \neg(\exists y)Prf_T(\underline{\psi_T}, y). \tag{2}$$

  ψ_T říká *"nejsem dokazatelná v T"*. Přesněji, ψ_T je ekvivalentní sentenci vyjadřující, že ψ_T není dokazatelná v T. (Ekvivalence platí v $\underline{\mathbb{N}}$ i v T).

- Nejprve ukážeme, že ψ_T *není dokazatelná v T*. Kdyby $T \vdash \psi_T$, tj. ψ_T je lživá v $\underline{\mathbb{N}}$, pak $\underline{\mathbb{N}} \models (\exists y)Prf_T(\underline{\psi_T}, y)$ a navíc $T \vdash (\exists y)Prf_T(\underline{\psi_T}, y)$. Tedy z (2) plyne $T \vdash \neg\psi_T$, což ale není možné, neboť T je bezesporná.

- Zbývá dokázat, že ψ_T je pravdivá v $\underline{\mathbb{N}}$. Kdyby ne, tj. $\underline{\mathbb{N}} \models \neg\psi_T$, pak $\underline{\mathbb{N}} \models (\exists y)Prf_T(\underline{\psi_T}, y)$. Tedy $T \vdash \psi_T$, což jsme již dokázali, že neplatí. □

Důsledky a zesílení 1. věty

Důsledek *Je-li navíc* $\underline{\mathbb{N}} \models T$*, je teorie* T *nekompletní.*

Důkaz Kdyby byla T kompletní, pak $T \vdash \neg\psi_T$ a tedy $\underline{\mathbb{N}} \models \neg\psi_T$, což je ve sporu s $\underline{\mathbb{N}} \models \psi_T$. □

Důsledek $\mathrm{Th}(\underline{\mathbb{N}})$ *není rekurzivně axiomatizovatelná.*

Důkaz $\mathrm{Th}(\underline{\mathbb{N}})$ je bezesporná extenze Robinsonovy aritmetiky a má model $\underline{\mathbb{N}}$. Kdyby byla rekurzivně axiomatizovatelná, dle předchozího důsledku by byla nekompletní, ale $\mathrm{Th}(\underline{\mathbb{N}})$ je kompletní. □

Gödelovu 1. větu o neúplnosti lze následovně zesílit.

Věta (Rosser) *Pro každou bezespornou rekurzivně axiomatizovanou extenzi* T *Robinsonovy aritmetiky existuje nezávislá sentence. Tedy* T *je nekompletní.*

Poznámka *Tedy předpoklad, že* $\underline{\mathbb{N}} \models T$*, je v prvním důsledku nadbytečný.*

Gödelova 2. věta o neúplnosti

Označme Con_T sentenci $\neg(\exists y)Prf_T(\underline{0=1}, y)$. Platí $\mathbb{N} \models Con_T \Leftrightarrow T \nvdash 0 = \underline{1}$.

Tedy Con_T vyjadřuje, že *"T je bezesporná"*.

Věta (Gödel) *Pro každou bezespornou rekurzivně axiomatizovanou extenzi T Peanovy aritmetiky platí, že Con_T není dokazatelná v T.*

Důkaz (náznak) Nechť ψ_T je Gödelova sentence *"nejsem dokazatelná v T"*.

- V první části důkazu 1. věty o neúplnosti jsme ukázali, že

  "Je-li T bezesporná, pak ψ_T není dokazatelná v T." (3)

  Jinak vyjádřeno, platí $Con_T \to \psi_T$.
- Je-li T extenze Peanovy aritmetiky, důkaz tvrzení (3) lze formalizovat v rámci T. Tedy $T \vdash Con_T \to \psi_T$.
- Jelikož T je bezesporná dle předpokladu věty, podle (3) je $T \nvdash \psi_T$.
- Z předchozích dvou bodů vyplývá, že $T \nvdash Con_T$. □

Poznámka *Taková teorie T tedy neumí dokázat vlastní bezespornost.*

Důsledky 2. věty

Důsledek *Existuje model $\mathcal{A}$ Peanovy aritmetiky t.ž. $\mathcal{A} \models (\exists y) Prf_{PA}(\underline{0=1}, y)$.*

Poznámka *$\mathcal{A}$ musí být nestandardní model PA, svědkem musí být nestandardní prvek (jiný než hodnoty numerálů).*

Důsledek *Existuje bezesporná rekurzivně axiomatizovaná extenze T Peanovy aritmetiky taková, že $T \vdash \neg Con_T$.*

Důkaz Nechť $T = PA \cup \{\neg Con_{PA}\}$. Pak T je bezesporná, neboť $PA \nvdash Con_{PA}$. Navíc $T \vdash \neg Con_{PA}$, tj. T dokazuje spornost $PA \subseteq T$, tedy i $T \vdash \neg Con_T$. □

Poznámka *$\underline{\mathbb{N}}$ nemůže být modelem teorie T.*

Důsledek *Je-li teorie množin ZFC bezesporná, není Con_{ZFC} dokazatelná v ZFC.*

Co bude u zkoušky?

Písemná část: 90 min, pro postup do ústní části aspoň 1/2 bodů.

Ústní část: cca 20 min, obvykle v pořadí odevzdávání písemné části.

Co nebude v písemné části.

- Hilbertovský kalkul (ani v ústní části).
- LD a SLD rezoluce, SLD stromy (ani v ústní části).
- Programy v Prologu (ani v ústní části).
- (Ne)rozhodnutelnost a neúplnost.

Co bude v ústní části?

(a) Definice, algoritmy či konstrukce, znění vět.

(b) Důkaz zadané věty či tvrzení.

Poznámka *Na* `stránce` *z minulého roku jsou zadání písemek jako vzor.*

Které důkazy se zkouší?

- Cantorova věta, Königovo lemma.
- Algoritmy pro 2-SAT a Horn-SAT (důkaz korektnosti).
- Tablo metoda ve VL: syst. tablo (dokončenost, kon. důkazu), korektnost, úplnost.
- Věta o kompaktnosti VL a její důsledky.
- Rezoluce ve VL: korektnost, úplnost. LI-rezoluce (úplnost pro Horn. formule).
- Sémantika PL: věta o konstantách, vlastnosti otevřených teorií, věta o dedukci.
- Tablo metoda v PL: syst. tablo (dokon., kon. důkazu), význam axiomů rovnosti.
- Tablo metoda v PL: korektnost, kanonický model (s rovností), úplnost.
- Löwenheim-Skolemova věta. Věta o kompaktnosti PL a její důsledky.
- Extenze o definice, Skolemova věta, Herbrandova věta.
- Rezoluce v PL: korektnost, úplnost, lifting lemma, LI-rezoluce.
- Elementární ekvivalence, důsledky L.-S. věty. Izomorfismus a sémantika.
- ω-kategoričnost, podmínky pro konečnou a otevřenou axiomatizovatelnost.
- Invariance definovatelných množin na automorfismy.