

Písemka 19. 2. 2016

Příklad 1 (8 bodů). V sudí máme následující počty očíslovaných míček (stejných až na napsané číslo): 1 míček s číslem 1, 2 míčky s číslem 2, 3 míčky s číslem 3 a 4 míčky s číslem 4.

Náhodně vytáhneme jeden míček, zjistíme na něm napsané číslo C a poté hodíme C šestistennými kostkami, tj. tolikrát, kolik je napsáno na míčku. Označme S výsledek hodu, tj. součet výsledků na kostkách.

- Jaká je střední hodnota S ?
- Jaký je rozptyl S ?
- Jaká je pravděpodobnost, že jsme vytáhli míček s číslem 2 za podmínky $S = 4$?
- Jaká je pravděpodobnost, že jsme vytáhli míček s číslem 2 za podmínky $S \leq 4$?
- Určete podmíněné rozdělení a podmíněnou střední hodnotu čísla C za podmínky, že $S \geq 14$.
(Pro výpočet (e) využijte symetrii výsledků, tedy například u hodu čtyřmi kostkami je $P\{C = k\} = P\{C = 28 - k\}$.)

Příklad 2 (4 body). Definujte podmíněnou pravděpodobnost, definujte nezávislost náhodných jevů. Vyslovte a dokažte Bayesovu větu.

Příklad 3 (3 bodů). X je spojitá náhodná veličina s hustotou $f(x) = c(4x - 2x^2)\mathbb{I}[0 < x < 2]$.

- Najděte c tak, aby f byla hustota.
- Spočítejte $P(X > 1)$.
- Určete $F(x)$ distribuční funkci X .
- Určete $E\frac{1}{X}$.

Příklad 4 (8 bodů). Studenti MFF zkoumali, zda lidé znají rozdíl mezi mediánem a střední hodnotou. Při náhodném výběru zjistili, že z 900 osob oslovených v dostatečně vzdálenosti od matfym jách správně odpovědělo 72.

- Určete (asymptotický) 95% intervalový odhad pravděpodobnosti p , že náhodně oslovený občan ví, jaký je rozdíl mezi mediánem a střední hodnotou.
- Určete bodový odhad p .
- S pomocí Čebyševovy nerovnosti odhadněte, s jakou pravděpodobností se liší uvedený odhad od skutečného o nejvýše 0,005. Rozptyl odhadněte z náhodného výběru (jde-li o konzistentní odhad, berete jej jako konstantu), nebo vezměte nejhorší možný případ rozptylu. Porovnejte s výsledkem z bodu (a).
- Jak se postavíte k tvrzení, že alespoň 10 % populace ví o rozdílu mezi mediánem a střední hodnotou?

Příklad 5 (5 bodů). Definujte náhodnou veličinu, definujte a vysvětlete jak se počítají.

- Distribuční funkce a její vlastnosti.
- Střední hodnota, rozptyl.
- Ukažte předchozí na příkladu Poissonova rozdělení s parametrem 1, tj.

$$P\{X = k\} = e^{-1} \frac{1}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots$$

- Definujte momentovou vytvořující funkci, spočítejte ji pro Poissonovo rozdělení s parametrem 1 a ukažte, jako s její pomocí získáte střední hodnotu.

Příklad 6 (6 bodů). Definujte bodový odhad parametru. Jaká je jeho interpretace? Vysvětlete metoda momentů. Pomocí vhodných limitačních vět ukažte, že vhodně zkonstruovaný bodový odhad je konzistentní.

(Začněte od náhodného výběru a jeho parametrického rozdělení. Můžete uvažovat i konkrétní rozdělení jako příklad, na kterém své úvahy vysvětlíte; například můžete ukázat bodový odhad pravděpodobnosti nuly v Poissonově rozdělení.)