

## NÁHODNÉ VEKTORY

23. – 27. 11. 2015

- 
1. Pravděpodobnost narození dcery je stejná jako pravděpodobnost narození syna. Náhodná veličina  $X$  udává počet dcer v náhodně vybrané rodině se třemi dětmi, veličina  $Y$  udává počet starších bratrů nejmladšího dítěte v téže rodině.
- (a) Odvodte rozdělení náhodného vektoru  $(X, Y)^T$ .
  - (b) Jaké jsou marginální rozdělení veličin  $X$  a  $Y$ ?
  - (c) Jsou veličiny  $X$  a  $Y$  nezávislé?
  - (d) Spočítejte kovarianci  $X$  a  $Y$ . Jaký je vztah mezi nezávislostí dvou veličin a jejich kovariancí?
  - (e) Spočítejte korelační koeficient mezi  $X$  a  $Y$ .

2. Náhodná veličina  $X$  udává dobu, kterou strávíte čekáním na tramvaj na Malostranském náměstí (v minutách) a náhodná veličina  $Y$  udává dobu, kterou následně strávíte čekáním na metro A ve stanici Malostranská (také v minutách). Ze zkušenosti víme, že náhodný vektor  $(X, Y)^T$  má spojitě rozdělení s hustotou

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x-y/2} & \text{pro } x > 0, y > 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- (a) Jaké je rozdělení jednotlivých dob čekání (na tramvaj a na metro zvlášť)?
  - (b) Spočítejte kovarianci  $X$  a  $Y$ .
  - (c) Jsou doby strávené čekáním na tramvaj a na metro nezávislé?
  - (d) Jaká je střední doba Vašeho celkového čekání na dopravní prostředky?
3. Náhodná veličina  $X$  má rovnoměrné rozdělení na intervalu  $(-1, 1)$ . Označme  $Y = X^2$ . Spočítejte kovarianci veličin  $X$  a  $Y$  a jejich korelační koeficient  $\rho_{XY}$ . Jsou  $X$  a  $Y$  nezávislé?
4. Zmatená šatnářka náhodně přiřadí  $n$  pánům jejich klobouky. Náhodná veličina  $X_i$  je indikátor jevu, zda má  $i$ -tý pán správný klobouk,  $i = 1, \dots, n$  (tj.  $X_i = 1$ , pokud  $i$ -tý pán má svůj klobouk a  $X_i = 0$  jinak).
- (a) Spočítejte střední hodnotu a rozptyl veličiny  $X_i$  pro pevně zvolené  $i$ .
  - (b) Jsou veličiny  $X_i, X_j$  pro pevné  $i, j$  nezávislé?
  - (c) Spočítejte kovarianci  $X_i$  a  $X_j$ .
  - (d) Na základě výše uvedených výsledků spočítejte očekávanou hodnotu a rozptyl počtu správně přiřazených klobouků. (Využijte fakt, že počet správně přiřazených klobouků  $X$  lze vyjádřit jako  $X = \sum_{i=1}^n X_i$ .)

## OPAKOVÁNÍ Z PŘEDNÁŠKY

KOVARIANCE A KORELACE: Kovariance  $\text{Cov}(X, Y)$  náhodných veličin  $X, Y$  je definována jako

$$\text{Cov}(X, Y) = E(X - EX)(Y - EY) = E(XY) - (EX)(EY),$$

je-li  $EX^2 < \infty$ ,  $EY^2 < \infty$ .

Koeficient korelace  $\rho_{XY}$  je definován jako

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var } X} \sqrt{\text{Var } Y}},$$

je-li  $\text{Var } X, \text{Var } Y > 0$ . Platí vždy  $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$ . Korelační koeficient je mírou lineární závislosti mezi  $X$  a  $Y$ .

MARGINÁLNÍ ROZDĚLENÍ:

- (a) Jestliže má  $(X, Y)^T$  diskrétní rozdělení a nabývá pouze hodnot  $(x_i, y_j)$ , pak marginální rozdělení veličiny  $X$  je diskrétní a spočteme jej jako

$$P(X = x_i) = \sum_j P(X = x_i, Y = y_j).$$

- (b) Jestliže má  $(X, Y)^T$  spojitě rozdělení s hustotou  $f(x, y)$ , pak marginální hustotu veličiny  $X$  spočteme jako

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy.$$

Podobně pro marginální hustotu  $f_Y$  veličiny  $Y$ .

NEZÁVISLOST:

- (a) Jestliže má  $(X, Y)^T$  spojitě rozdělení s hustotou  $f$ ,  $X$  má marginální hustotu  $f_X$  a  $Y$  má hustotu  $f_Y$ , pak jsou veličiny  $X, Y$  nezávislé právě tehdy, když

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) \text{ pro s.v. } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- (b) Jestliže má  $(X, Y)^T$  diskrétní rozdělení a nabývá pouze hodnot  $(x_i, y_j)$ , pak jsou veličiny  $X, Y$  nezávislé právě tehdy, když

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j) \text{ pro všechna } x_i, y_j.$$

DALŠÍ UŽITEČNÉ VLASTNOSTI: Jestliže  $X_1, \dots, X_n$  jsou náhodné veličiny a  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ , pak platí (za předpokladu existence daných momentů)

- $E(\sum_{i=1}^n a_i X_i) = \sum_{i=1}^n a_i EX_i$
- $\text{Var}(\sum_{i=1}^n a_i X_i) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \text{Var } X_i + \sum \sum_{i \neq j} a_i a_j \text{Cov}(X_i, X_j)$