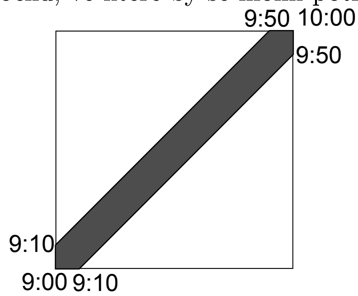
Geometrická pravděpodobnost

1. Přátelé Igor a Dano si domluví schůzku mezi 9:00 a 10:00. Jejich příchody na dané místo jsou náhodné v rámci smluveného časového intervalu. Každý bude čekat 10 minut a pak odchází, nejpozději však v 10:00. Jaká je pravděpodobnost, že se jim podaří setkat se?

Nakreslíme si čtverec, kde na X-ové ose bude4as, kdy na místě bude jeden, a na Y-nové, kdy na místě bude druhý. Pak si vyznačím plochu, ve které by se mohli potkat:



a použiji výpočet pravděpodobnosti pomocí objemů ploch.

$$P(Setkani) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|\Omega| - |A^C|}{|\Omega|} = \frac{60 \cdot 60 - 50 \cdot 50}{60 \cdot 60} = \frac{11}{36}$$

2.Na úsečce délky ℓ jsou náhodně umístěny body, které tuto úsečku rozdělí na tři části. S jakou pravděpodobností je možné z takto vzniklých tří úseček sestrojit trojúhelník?

Umísťujeme dva body, ty si označíme A a B. Z bude začátek úsečky ($Z = 0$) a K bude konec úsečky ($K = 1$).

Víme, že pro úsečky trojúhelníka $0 < a \leq c \wedge 0 < b \leq c$ musí platit $c < a + b$.

Nejprve si rozmyslíme, jaké je maximální a minimální c a kde všude se může c nacházet.

Největší možné c je těsně menší jak $\frac{1}{2}$, nejmenší pak, když jsou všechny strany stejně dlouhé ($\frac{1}{3}$).

- Pokud $A < B$, úsečka c může být buď mezi $|ZA|, |AB|, |BK|$
- Pokud $A > B$, úsečka c může být buď mezi $|ZB|, |AB|, |AK|$

případ $A = B$ řešit nemusíme, protože pak bychom měli jen 2 úsečky.

Z výše zmíněného je vidět, že celá úloha je symetrická podle $A = B$, tedy stačí si nakreslit jen trojúhelník a vše vykreslovat do trojúhelníku. Já jsem si vybral, že budu vše kreslit pro případ $A < B$.

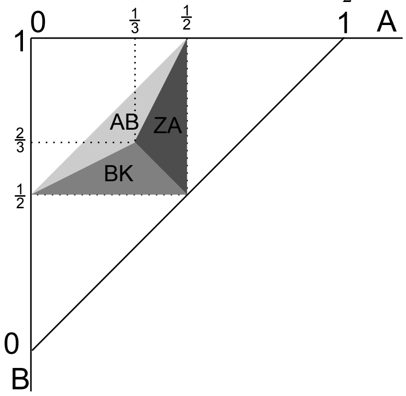
Pro jednotlivé výskyty úsečky c najdeme krajní body. Víme, že mezi těmito krajními body jsou všechny body přípustné.

Z $c = \frac{1}{3}$ víme, že $A = \frac{1}{3}$ a $B = \frac{2}{3}$.

$\frac{1}{2} = c = |ZA| = A < (B - A) + (1 - B) = B - A + 1 - B = 1 - A \Rightarrow A_{Maximální} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} = c = |AB| = B - A < A + (1 - B) = 1 + (A - B) = 1 - (B - A) \Rightarrow (B - A)_{Maximální} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} = c = |BK| = 1 - B < A + (B - A) = B \Rightarrow B_{Minimální} = \frac{1}{2}$



Z obrázku je vidět, že sjednocení ploch ZA, AB, BK je půlka čtverce o straně $\frac{1}{2}$

$$P(vzniku\ trojúhelníku) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1} = \frac{1}{4}$$

Nezávislost, podmíněná pravděpodobnost

3. Nechť A, B jsou neslučitelné jevy. Mohou být tyto dva jevy nezávislé?

Tím, že jsou neslučitelné, víme, že $P(A \cap B) = P(\{\}) = 0$.
A aby jevy byly nezávislé, musí platit $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, což dle výše zmíněného je 0.
Tedy nezávislé jsou tehdy a jen tehdy, pokud $P(A) = 0 \vee P(B) = 0$.

4. Pravděpodobnost, že ve vlaku není místo k sezení je 0.2 a pravděpodobnost, že vlak přijede pozdě, je 0.3. Pravděpodobnost, že vlak přijede pozdě nebo v něm není místo k sezení je 0.4.

Značení:

$P(M^C) = 0.2 \ldots$ není místo k sezení

$P(P) = 0.3 \ldots$ přijede pozdě

$P(P \cup M^C) = 0.4 \ldots$ přijede pozdě nebo není místo k sezení

$P(P \cap M^C) = 0.1$, protože $P(P \cup M^C) = P(P) + P(M^C) - P(P \cap M^C) \Rightarrow P(P \cap M^C) = P(P) + P(M^C) - P(P \cup M^C) = 0.3 + 0.2 - 0.4 = 0.1$

a) *S jakou pravděpodobnostní vlak přijede na čas, ale nebudete si v něm moci sednout?*
Zajímá mě $P(P^C \cap M^C) \ldots$ přijel na čas a nemůžu si sednout
Z věty o úplné pravděpodobnosti víme, že

$$P(M^C) = P(M^C \cap P^C) + P(M^C \cap P) \Rightarrow P(M^C \cap P^C) = P(M^C) - P(M^C \cap P) = 0.2 - 0.1 = 0.1$$

b) *S jakou pravděpodobnostní si budete moci ve vlaku sednout, jestliže přijede pozdě?*
Zajímá mne $P(M|P) \ldots$ můžu si sednout za podmínky, že vlak přijede pozdě
Nejprve spočítám $P(M \cap P^C)$

$$P(M \cup P^C) = P\left((P \cap M^C)^C\right) = P(M) + P(P^C) - P(M \cap P^C) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(M \cap P^C) = P(M) + P(P^C) - P\left((P \cap M^C)^C\right) = 0.8 + 0.7 - 0.9 = 0.6$$

Z věty o úplné pravděpodobnosti spočítám $P(M \cap P)$
$P(M) = P(M \cap P) + P(M \cap P^C) \Rightarrow P(M \cap P) = P(M) - P(M \cap P^C) = 0.8 - 0.6 = 0.2$
nakonec mám všechny potřebné informace pro spočítání $P(M|P)$

$$P(M|P) = \frac{P(M \cap P)}{P(P)} = \frac{0.2}{0.7} = \frac{2}{7}$$

c) Jsou jevy [vlak přijede všas] a [ve vlaku bude místo k sezení] nezávislé?

$$P(P \cap M^C) = 0.1 \stackrel{?}{=} P(P) \cdot P(M^C) = 0.2 \cdot 0.3 = 0.06$$

Tedy nejsou nezávislé.

5. Házíme dvěma pravidelnými kostkami – modrou a zelenou. Označme jevy $A =$[na modré kostce padlo sudé číslo], $B =$[na zelené kostce padlo liché číslo], $C =$[součet čísel je lichý]. Jsou náhodné jevy A, B, C po dvou nezávislé? Jsou jevy A, B, C nezávislé?

Napíši si tabulku pro jednotlivé možnosti a zanesu do ní, kdy nastal který jev. Z tabulky pak snadno vyčtu pravděpodobnosti pro jednotlivé jevy.

	$modrá - sudá$	$modrá - lichá$
$zelná - sudá$	A	C
$zelená - lichá$	A, B, C	B

Z tabulky si napísi pravděpodobnost jednotlivých jevů

$P(A) = \frac{1}{2}$

$P(B) = \frac{1}{2}$

$P(C|A) = \frac{1}{2} \ldots$ na modré padlo sudé (tedy koukám na sloupec $modrá - sudá$) a tam je jen $1 \times C$ a celkem tam jsou 2 řádky

$P(C|B) = \frac{1}{2} \ldots$ na zelené padlo liché a na modré tedy musí padnout sudé, což padne s pravděpodobností $\frac{1}{2}$

Z tabulky vyčteme hodnotu $P(A \cap B)$
$P(A \cap B) = \frac{1}{4} \stackrel{?}{=} P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4}$, tedy A a B jsou nezávislé.

$P(C) = P(A \cap B) + P(A^C \cap B^C) = \frac{1}{2}$ (nebo lze vyčíst z tabulky)
$P(A \cap C) = P(C|A) \cdot P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \stackrel{?}{=} P(A) \cdot P(C) = \frac{1}{4}$ tedy A a C jsou nezávislé.

$P(B \cap C) = P(C|B) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \overset{?}{=} P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{4}$, tedy B a C jsou nezávislé.

$P(B \cap C \cap A) = P(C \cap A|B) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \overset{?}{=} P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{8}$, tedy jevy A,B a C nejsou nezávislé.

Věta o úplné pravděpodobnosti

6. Mezi 100 krabicemi mandarinek ze Španělska je 5 krabic se hnilými, stejně jako mezi 200 krabicemi z Řecka. Nejdříve vyberme náhodně jednu ze zásilek a potom ze zásilky náhodně vybereme krabici. Určete s jakou pravěpdoobností obsahuje vybraná krabice shnilé mandarinky.

Značení:
$P(S) = \frac{1}{2}$ … vyberu španělskou
$P(R) = \frac{1}{2}$ … vyberu řeckou
$P(Z^C|S) = \frac{1}{20}$ … shnilá ve španělské krabici
$P(Z^C|R) = \frac{1}{40}$ … shnilá v řecké
nás zajímá $P(Z^C)$

$$P(Z^C) = P(S) \cdot P(Z^C|S) + P(R) \cdot P(Z^C|R) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{20} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{40} = \frac{3}{80}$$

7. Přenášíme binární soubor, který obsahuje znaky „0“ a „1“. Pravděpodobnost, že se při přenosu zkreslí „0“, je $\frac{1}{4}$ a pravděpodobnost, že se zkreslí „1“, je $\frac{1}{6}$. Je známo, že přenášené znaky „0“ a „1“ se vyskytují v poměru 4 : 3. S jakou pravděpodobností se posloupnost o 6 znacích při přenosu nezkreslí, jestliže jednotlivé znaky se zkreslují nezávisle?

Značení:
$P(0) = \frac{4}{7}$ … vyberu „0“
$P(1) = \frac{3}{7}$ … vyberu „1“
$P(Z|0) = \frac{1}{4}$ … zkreslí se „0“
$P(Z|1) = \frac{1}{6}$ … zkreslí se „1“
Nejprve spočítáme pravděpodobnost zkreslení jednoho znaku.

$$P(Z) = P(Z|0) \cdot P(0) + P(Z|1) \cdot P(1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{7} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{14}$$

Pravděpodobnost, že se nezkreslí ani jeden ze 6 znaků (Z_6^C), když zkreslení je na sobě nezávislé, je:

$$P(Z_6^C) = (1 - P(Z))^6 = \left(\frac{11}{14}\right)^6 \approx 0.24$$

8. (Polyovo urnové schéma) Krabice obsahuje a černých a b bílých koulí. Student náhodně vytáhne jednu kouli, poznačí si její barvu a vrátí ji zpět společně s d koulí téže barvy. Jaká je pravděpodobnost vytažení bílé koule v prvním a druhém tahu?

Značení

$P(B)$	$=$	$\frac{bílé}{černé+bílé}$	…	vytažení bílé v lib. tahu
$P(B_1)$	$=$	$\frac{b}{a+b}$	…	vytažení bíle v 1.tahu
$P(C_1)$	$=$	$\frac{a}{a+b}$	…	vytažení černé v 1.tahu
$P(B_i)$			…	vytažení bíle v i.tahu

Pravděpodobnost v 1. tahu je jednoduchá, je to podíl bílých ku všem. Ve 2. tahu to bude složitější, protože může začít záviset na tom, co vytáhl v předchozím tahu.

$$P(B_2) = P(B \cap B_1) + P(B \cap C_1) = P(B|B_1) \cdot P(B_1) + P(B|C_1) \cdot P(C_1) = \frac{b+d}{a+b+d} \cdot \frac{b}{a+b} + \frac{b}{a+d+b} \cdot \frac{a}{a+b}$$

$$= \frac{b \cdot (b+d) + ba}{(a+b+d)(a+b)} = \frac{b \cdot (b+d+a)}{(a+b+d)(a+b)} = \frac{b}{a+b}$$