

NMAI060 Pravděpodobnostní metody - výpisky

Jan Michelfeit

<jan.michelfeit@seznam.cz>

ZS 2011/2012

Obsah

1 Úvod	2
2 Vytvořující funkce	3
3 Rekurentní jevy	5
3.1 Klasifikace rekurentních jevů	7
4 Markovovy řetězce	9
4.1 Klasifikace stavů MŘ	9
4.2 Nerozložitelné řetězce	10
4.3 Stacionární rozdělení	10
5 Lineární proces zrodu a zániku	12
5.1 Příklady	14
5.2 Poissonův proces jako model zrodu a zániku	16
5.3 Systémy hromadné obsluhy	17
6 Ostatní	19

Poznámka k výpiskům

Toto jsou moje výpisky z přednášek, [slidů](#) od prof. Antocha, zápisků od [tuetscheka](#) a [fóra](#). Důkazy obsahují většinou pouze náznak myšlenky.

Tento text si v žádném případě nečiní nárok na bezchybnost. Mohou se vyskytnout překlepy a jsou psané, jak jsem výklad pochopil, bez záruky správnosti, což může být samozřejmě úplně špatně. Pokud najdete nějakou chybu, dejte prosím vědět.

1 Úvod

Definice 1.1 (Rozptyl). Rozptyl náhodné veličiny X je $\text{var } X = E[(X - EX)^2] = EX^2 - (EX)^2 = \sigma^2$.

Definice 1.2. Charakteristiky spojitých náhodných veličin:

1. **Distribuční funkce** $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = P(X \leq x)$
2. **Střední hodnota** $EX = \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx$; platí $Eg(x) = \int g(x)f(x)dx$
3. **Rozptyl** $\int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)dx - (EX)^2$

Definice 1.3 (Rozdělení). Funkce, která každé hodnotě náhodné veličiny přiřazuje její pravděpodobnost.

- **alternativní** $\text{Alt}(p)$ – $P(X = 1) = p$, $P(X = 0) = 1 - p$, $EX = p$, $\text{var } X = p(1 - p)$
- **binomické** $\text{Bi}(n, p)$ – n nezávislých alternativních pokusů; X nabývá $0, 1, \dots, n$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

$$EX = np$$

$$\text{var } X = np(1 - p)$$

- **rovnoměrné** $\text{R}(x_1, \dots, x_n)$ – X nabývá x_1, \dots, x_n

$$P(X = x_i) = \frac{1}{n}$$

$$EX = \frac{1}{n} \sum x_i$$

- **geometrické** $\text{Ge}(p)$ – pravděpodobnost prvního úspěchu právě v pokusu n

$$P(X = n) = (1 - p)^{n-1} p$$

- **Poissonovo** – X nabývá $0, 1, 2, \dots$

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$EX = \text{var } X = \lambda$$

Jsou-li $X \sim \text{Po}(\lambda_1)$, $Y \sim \text{Po}(\lambda_2)$ nezávislé, potom $X + Y \sim \text{Po}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

- **Spojitá rozdělení:**

	$f(x)$	$F(x)$	EX	$\text{var } (X)$
$U(a, b)$	$\frac{1}{b-a}, x \in (a, b), \text{jinak } 0$	$\frac{x-a}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(a-b)^2}{12}$
$\exp(\lambda)$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$1 - e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$N(\mu, \sigma^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$	$\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$	μ	σ^2

2 Vytvořující funkce

Náhodné veličiny se uvažují celočíselné.

Definice 2.1. Vytvořující funkce posloupnosti a_0, a_1, \dots je $\mathcal{A}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$, pokud konverguje v okolí nuly.

Definice 2.2. Vytvořující funkce celočíselné náhodné veličiny X je vytvořující funkce $\mathcal{P}(x)$ posloupnosti $p_n = P(X = j)$, $j = 0, 1, 2, \dots$

Poznámka. Taylorův rozvoj mocninné řady $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$, konverguje na $(-1, 1)$ (\sim vytvořující funkce $(1, 1, \dots)$). Pro e^x platí $e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Součet geometrické řady je $\frac{a_1}{1-q}$ pro $|q| < 1$.

Definice 2.3 (Operace s mocninnými řadami). $a(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, $b(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$.

- sčítání, násobení konstantou
- $x^n a(x)$ – přidání n nul na začátek
- vynechání prvních n členů
- $a(\alpha x)$ – dosazení αx za x
- $a(x^n)$ – $(a_0, 0, \dots, 0, a_1, \dots)$
- derivování – $(a_1, 2a_2, 3a_3, \dots)$
- integrování – $(0, a_0, \frac{1}{2}a_1, \dots)$
- násobení – konvoluce
- $a(1) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i$
- $a(0) = a_0$

Poznámka. $\mathcal{P}(z) = E[z^X]$.

Věta 2.1 (•). Pro $q_k = P(X > k)$ platí $\mathcal{Q}(x) = \frac{1-\mathcal{P}(x)}{1-x}$.

Důkaz. Konvoluce $(1, 1, \dots)$ a $(1 - p_0, -p_1, -p_2, \dots)$. ♡

Věta 2.2 (•). $EX = \mathcal{P}'(1)$

Věta 2.3. $\text{var } X = \mathcal{P}''(1) + \mathcal{P}'(1) - (\mathcal{P}'(1))^2$ pro celočíselnou náhodnou veličinu X s poloměrem konvergence větším než 1.

Důkaz. $\mathcal{P}''(1) + \mathcal{P}'(1) = \sum_{i=1}^{\infty} i^2 a_i = EX^2$. ♡

Poznámka (•). $p_j = \frac{\mathcal{P}^{(j)}(0)}{j!}$

Věta 2.4. Nechť $\mathcal{P}(x) = U(x)/V(x)$, U, V nemají společné kořeny, U má nižší stupeň a V má jednoduché kořeny. Potom pro kořeny x_1, \dots, x_m polynomu $V(x)$ platí:

$$p_n = \frac{\varrho_1}{x_1^{n+1}} + \dots + \frac{\varrho_m}{x_m^{n+1}}$$

Poznámka. Pro $n \rightarrow \infty$ platí $p_n \approx \frac{\varrho_1}{x_1^{n+1}}$.

Příklad. Vytvořující funkce rozdělení:

- alternativní - $\mathcal{P}(x) = q + px$,
- binomické - $\mathcal{P}(x) = (q + px)^n$,
- Poissonovo - $\mathcal{P}(x) = e^{-\lambda(1-x)}$,
- geometrické - $\mathcal{P}(x) = \frac{p}{1-qx}$, resp. $\frac{px}{1-qx}$,
- rovnoměrné - $\frac{x(1-x^n)}{n(1-x)}$.

Poznámka. Geometrické rozdělení je nejjednodušší model doby čekání.

Definice 2.4 (Konvoluce). Mějme posloupnosti $\{a_j\}, \{b_j\}$, $c_n = a_0b_n + \dots + a_nb_0$ pro $n = 0, 1, \dots$. Potom $\{c_j\}$ nazýváme konvoluce, $\{c_j\} = \{a_j\} \star \{b_j\}$.

Věta 2.5. Pro $\{c_j\} = \{a_j\} \star \{b_j\}$ a jejich odpovídající vytvořující funkce platí

$$\mathcal{C}(x) = \mathcal{A}(x)\mathcal{B}(x).$$

Věta 2.6. Součet $\sum_{i=1}^n X_i$ pro X_i i.i.d. s vytvořující funkcí $\mathcal{P}(x)$ má rozdělení dané n -tou konvoluční mocninou $\{p_j\}^{n\star}$ s vytvořující funkcí $\mathcal{P}^n(x)$.

Věta 2.7 (•). Nechť X_i jsou i.i.d. s rozdělením $\{a_j\}$ a vytvořující funkcí $\mathcal{A}(x)$, N s rozdělením $\{b_j\}$ a vytvořující funkcí $\mathcal{B}(x)$. Potom $S_N = X_1 + \dots + X_N$ má rozdělení $\{c_j\}$:

$$c_j = P(S_N = j) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot \{a_j\}^{n\star}$$

a platí

$$\mathcal{C}(x) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(x))$$

a $ES_N = EX_1 \cdot EN$. Rozptýl se spočte z věty 2.3.

Důkaz. $c_j = \sum P(S_N = j \mid N = n)P(N = n)$ dle věty o úplné pravděpodobnosti. Odtud

$$\mathcal{C}(x) = \sum_j c_j x^j = \sum_j x^j \sum_n g_n f_j^{n\star} = \sum_n g_n (\mathcal{A}(x))^n = \mathcal{B}(\mathcal{A}(x))$$

$ES_N = EX_1 \cdot EN$ plyne z věty 2.2. ♡

Příklad. N vajíček, $N \sim Po(\lambda)$, indikátor vylíhnutí $X_i \sim Alt(p)$. Potom $S_N \sim Po(\lambda p)$.

Důkaz.

$$P(N = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Vytvořující funkce pro Poissona $\mathcal{P}(x) = e^{-\lambda(1-x)}$ + věta 2.7.

Vytvořující funkci Poissona lze odvodit pomocí

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

♡

Příklad (Šíření virů). V první generaci je $X^{(0)} = 1$ jedinec, ten má $X^{(1)} = X$ potomků s rozdělením daným vytvořující funkcí $A(x)$. Ve druhé generaci je $X^{(2)} = X_1 + X_2 + \dots + X_X = X^2$ jedinců \rightarrow vytvořující funkce $A(A(x))$. Střední hodnotu vypočteme z věty 2.2, přičemž využijeme $A(1) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i = 1$ (a_i je pravděpodobnostní rozdělení).

$$\begin{aligned} EX^{(i)} &= \underbrace{[A(\dots(A(x))\dots)]'_{x=1}}_i = A'(\underbrace{A(\dots A(x))}_{i-1}) A'(\underbrace{A(\dots A(x))}_{i-2}) \dots A'(x)|_{x=1} \\ &= A'(1)A'(1) \dots A'(1) = (EX)^i \end{aligned}$$

3 Rekurentní jevy

Definice 3.1 (• Rekurentní jev). Mějme posloupnost opakovaných (ne nutně nezávislých) pokusů, všechny mají tutéž nejvýše spočetnou množinu možných výsledků E_1, E_2, \dots . Nechť $\{E_{j_1}, \dots, E_{j_n}\}$ značí jev, že pokus $i \in [n]$ skončil E_{j_i} .

Nechť pro všechny takové konečné posloupnosti platí

$$P(E_{j_1}, \dots, E_{j_{n-1}}) = \sum_{j_n=1}^{\infty} P(E_{j_1}, \dots, E_{j_{n-1}}, E_{j_n}), \quad 1 < n < \infty$$

a o posloupnosti lze jednoznačně rozhodnout, zda má vlastnost ξ . ξ nastává na n -tém místě posloupnosti E_{j_1}, E_{j_2}, \dots pokud posloupnost E_{j_1}, \dots, E_{j_n} má vlastnost ξ .

Vlastnost ξ je **rekurentní jev**, pokud

1. ξ nastal na n -tém a $(n+m)$ -tém místě posloupnosti $E_{j_1}, \dots, E_{j_{n+m}}$ právě když nastane na posledním místě posloupnosti E_{j_1}, \dots, E_{j_n} a posloupnosti $E_{j_{n+1}}, \dots, E_{j_{n+m}}$.
2. V takovém případě platí

$$P(E_{j_1}, \dots, E_{j_{n+m}}) = P(E_{j_1}, \dots, E_{j_n}) \cdot P(E_{j_{n+1}}, \dots, E_{j_{n+m}})$$

Definice 3.2. Pro rekurentní jev ξ , $1 \leq n < \infty$ definujeme

- $u_n = P(\xi \text{ nastane v } n\text{-tém pokusu}), u_0 = 1$
- $f_n = P(\xi \text{ nastane v } n\text{-tém pokusu poprvé}), f_0 = 0$

Věta 3.1 (•). Pro u_n, f_n platí

$$u_n = f_0 u_n + f_1 u_{n-1} + \dots + f_n u_0, \quad n \geq 1$$

a pro odpovídající vytvořující funkce

$$U(X) - 1 = F(X)U(x).$$

Důkaz. Rekurentní vzorec z věty o úplné pravděpodobnosti podle toho, kdy jev nastal poprvé.

$$U(X)F(X) \sim (f_0 u_0, f_0 u_1 + f_1 u_0, f_0 u_2 + f_1 u_1 + f_2 u_0, \dots) = (0, f_1, f_1 u_1 + f_2, \dots)$$

$$U(X) - 1 \sim (u_0 - 1, u_1, \dots) = (1 - 1, u_1, \dots)$$

♡

Příklad. Nechť q_n je pravděpodobnost toho, že v posloupnosti n hodů mincí nepadne ani jednou trojice líců za sebou. Odvoďte vytvořující funkci

$$Q(x) = \frac{8 + 4x + 2x^2}{8 - 4x - 2x^2 - x^3}.$$

Důkaz. Označme

- p pravděpodobnost hodu líce (L),
- ξ jev, že padnou tři líce za sebou,
- q_n pravděpodobnost, že první trojice líců padne až po n -tém kroku,
- f_n pravděpodobnost, že první trojice líců padne právě v n -tém kroku,
- u_n pravděpodobnost, že některá trojice líců padne v n -tém kroku; na tento případ se aplikuje zapomínání, tedy v posloupnosti RLLLL jev ξ nastává na pozici 5, ale na pozici 6 už ne.

Posloupnost $\dots LLL$ má pravděpodobnost p^3 . Pomocí u_n se zapomínáním ji můžeme vyjádřit jako

$$p^3 = u_n + pu_{n-1} + p^2u_{n-2}$$

(ξ může nastat přímo na pozici n , nebo na pozici $n-1$ a na pozici n je L, nebo na pozici $n-2$ a na pozicích $n-1$ a n je L). Pomocí pravidel pro počítání s vytvořujícími funkcemi z rekurentní rovnice odvodíme

$$\begin{aligned} \frac{p^3}{1-x} &= \frac{U(x)-1}{x^3} + \frac{p(U(x)-1)}{x^2} + \frac{p^2(U(x)-1)}{x} \\ U(x) &= 1 + \frac{p^3x^3}{(1-x)(1+px+p^2x^2)} \end{aligned}$$

Podle vět 2.1 a 3.1 platí

$$Q(x) = \frac{1-F(x)}{1-x} = \frac{1-\frac{U(x)-1}{U(x)}}{1-x} = \frac{1}{(1-x)U(x)}.$$

Dosazením $p = 1/2$ dostaneme výsledek. ♡

Poznámka. $\{f_n\}$ udává rozdělení náhodné veličiny T_1 popisující čekání na první výskyt rekurentního jevu. Je-li $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n < 1$, potom je T_1 nevlastní a $1-f$ je pravděpodobnost, že jev nenastal.

Definice 3.3. Nechť T_i jsou veličiny s tímto rozdělením f_n , potom je interpretujeme jako dobu návratu. $T^{(r)} = T_1 + \dots + T_r$.

$f_n^{(r)} = P(\xi \text{ nastane po } r\text{-té v } n\text{-tém pokusu}).$

Věta 3.2.

$$\{f_n^{(r)}\} = \{f_n\}^{r*}$$

Důkaz. $\{a_n\} := \{f_n\}^{r*}$, $a_n = \sum_{i=1}^r T_i$. ♡

Věta 3.3. Pravděpodobnost, že rekurentní jev nastane v nekonečné posloupnosti alespoň r -krát, je f^r , kde $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$.

3.1 Klasifikace rekurentních jevů

Definice 3.4. $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$

Definice 3.5 (• Trvalý jev). Jev ξ je **trvalý**, pokud $f = 1$. Pokud $f < 1$, je ξ **přechodný**.

Poznámka. Pravděpodobnost, že jev ξ nastane v nekonečné posloupnosti pokusů nekonečněkrát je jedna pro trvalý jev a nula pro přechodný jev.

Definice 3.6. Je-li $f = 1$, budeme označovat $\mu = ET_1 = \sum_{n=0}^{\infty} n f_n$ střední doba návratu.

Definice 3.7 (• Nulový jev). Trvalý jev ξ je **nulový**, jestliže $\mu = \infty$; pokud $\mu < \infty$, je **nenulový**.

Definice 3.8 (• Periodický jev). Rekurentní jev ξ je periodický, pokud existuje $\lambda \in \mathbb{N}$, $\lambda > 1$, t.ž. $u_n = 0$ pro všechna n , která nejsou dělitelná λ .

Největší takové λ je perioda ξ .

Věta 3.4. Rekurentní jev ξ je přechodný, právě když $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n < \infty$. V takovém případě je $f = \frac{u-1}{u}$.

Definice 3.9 (• Náhodná procházka). Mějme posloupnost i.i.d. náhodných veličin X_1, X_2, \dots , které mají výsledek $+1$ s pravděpodobností p a výsledek -1 s pravděpodobností $1-p$. Jednoduchá náhodná procházka s pravděpodobností zdaru p je potom posloupnost $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$, kde $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

Obecně je náhodná procházka model pohybu. Lze je zobecnit do více rozměrů (např. úloha opilý námořník na Manhattanu).

Příklad. Mějme jednoduchou náhodnou procházku s pravděpodobností zdaru p . Návrat do počátku označíme jako jev ξ (vyrovnání úspěchů a neúspěchů). Ukažte, že ξ je periodický jev trvalý pro $p = 1/2$ a přechodný jinak. Odvoďte vytvořující funkce $U(x)$, $F(x)$.

Důkaz. $u_{2n+1} = 0$, tedy ξ je periodický. $u_{2n} = \binom{2n}{n} p^n q^n$.

(i) $p = 1/2$

$$\sum_i u_i = \sum_n \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} = \sum_n \frac{(2n)!}{n!n!} \frac{1}{2^{2n}}$$

Využijeme aproximaci $n! \approx \sqrt{2\pi n} \frac{n^n}{e^n}$:

$$\sum_i u_i = 2^{2n} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \frac{1}{2^{2n}} = \sum_n \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = \infty$$

Podle věty 3.4 je tedy ξ trvalý jev.

$U(x)$ odvodíme pomocí vytvořující funkce $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$ (plyne ze zobecněné binomické věty):

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} (pqx^2)^n = \frac{1}{\sqrt{1-4pqx^2}}$$

Odtud plyne $F(x) = 1 - \sqrt{1-4pqx^2}$ a střední hodnota doby návratu

$$\mu = F'(1) = \frac{8pqx}{\sqrt{1-4pqx^2}} \Big|_{x=1, p=q=1/2} = \infty$$

a tedy ξ je nulový.

(ii) $p \neq q$

$$f = F(1) = 1 - \sqrt{1 - 4pq} < 1$$

Jev není trvalý.

Poznámka: $f_{2n} = \frac{2}{n} \binom{2n-2}{n-2} p^n q^n$

♡

Příklad. Náhodná procházka ve dvou rozměrech (se stejně pravděpodobnými směry):

$$u_{2n} = \sum_{i=0}^n \frac{(2n)!}{i!i!(n-i)!(n-i)!} \frac{1}{4^{2n}} \approx \frac{1}{\pi n} \Rightarrow \sum u_n = \infty$$

Jev je trvalý.

Náhodná procházka ve třech rozměrech: $u_{2n} \leq kn^{-\frac{3}{2}}$. Jev je přechodný.

Věta 3.5 (Limitní věta). Nechť rekurentní jev ξ je trvalý neperiodický. Potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{1}{\mu}.$$

Nechť rekurentní jev ξ je trvalý periodický s periodou λ . Potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n\lambda} = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Věta 3.6 (Asymptotické rozdělení). Nechť rekurentní jev ξ je trvalý. Nechť N_n je počet výskytů jevu do času n a $T^{(r)}$ doba čekání na r -tý výskyt. Potom jevy $[N_n \geq r]$ a $[T^{(r)} \leq n]$ jsou ekvivalentní. Nechť rozdělení dob prvních návratů má konečnou střední hodnotu μ (jev je nenulový) a rozptyl σ^2 . Potom $N_n \sim \mathcal{N}(\frac{n}{\mu}, \frac{n\sigma^2}{\mu^3})$ a

$$\lim_{r \rightarrow \infty} P\left(\frac{T^{(r)} - r\mu}{\sigma\sqrt{r}} \leq y\right) = \Phi(y).$$

Věta 3.7. Pro trvalý nenulový rekurentní jev, $n \rightarrow \infty$ platí $EN_n \approx \frac{n}{\mu}$.

Věta 3.8 (Rovnice obnovy). Nechť a_n a b_n jsou dvě posloupnosti, $a_0 = 0$, $a_n \in [0, 1]$, $b_n \geq 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$. Mějme $u_n = b_n + a_0 u_n + a_1 u_{n-1} + \dots + a_n u_0$, tj.

$$\{u_n\} = \{b_n\} + \{a_n\} \{u_n\}.$$

Tento vztah se nazývá **rovnice obnovy**.

Pro vytvořující funkce posloupností platí

$$\mathcal{U}(x) = \frac{\mathcal{B}(x)}{1 - \mathcal{A}(x)}.$$

Nechť a_n je neperiodická, $a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Pro $a < 1$ platí $u < \infty$. Pro $a = 1$ je a_n rozdělení doby návratu trvalého neperiodického rekurentního jevu a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{\sum_{n=1}^{\infty} n a_n}.$$

Poznámka. Odpovídá vztahu $U(x)$ a $F(x)$ rekurentních jevů pro $\mathcal{B}(x) = 1$.

4 Markovovy řetězce

Definice 4.1 (• Markovovy řetězce). Posloupnost pokusů se stejnou nejvýše spočetnou množinou možných výsledků E_1, E_2, \dots nazveme MŘ, jestliže pro každou konečnou posloupnost výsledků platí

$$P(E_{j_0}, E_{j_1}, \dots, E_{j_n}) = a_{j_0} p_{j_0 j_1} \cdots p_{j_{n-1} j_n},$$

kde a_k jsou pravděpodobnosti výsledků nultého pokusu a p_{jk} pravděpodobnosti výsledku E_k za podmínky výsledků E_j v předchozím pokusu.

$\{a_k\}$ se nazývá počáteční rozdělení, p_{jk} pravděpodobnosti přechodu.

Poznámka. Platí $\sum_j p_{ij} = 1$ (někam se přejít musí).

Definice 4.2. Pravděpodobnost přechodu ze stavu E_j do stavu E_k po n krocích budeme značit $p_{jk}^{(n)}$. Nepodmíněné pravěpodobnost $a_k^{(n)}$ je pravděpodobnost jevu, že systém je v čase n ve stavu E_k .

Věta 4.1. Hodnoty p_{jk}^n jsou prvky matice P^n .

Značení. Označme $f_{ij}^{(n)}$ pravděpodobnost prvního průchodu stavem E_j , začínáme-li v E_i a $p_{ij}^{(n)}$ pravděpodobnost toho, že systém je ve stavu E_j , začínáme-li v E_i .

Věta 4.2. Platí

$$\begin{aligned} \{p_{jj}^{(n)}\} &= \{f_{jj}^{(n)}\} \star \{p_{jj}^{(n)}\} \\ \{p_{ij}^{(n)}\} &= \{f_{ij}^{(n)}\} + \{f_{jj}^{(n)}\} \star \{p_{ij}^{(n)}\} \end{aligned}$$

Příklad. Příklady MŘ:

- náhodné procházky po přímce (s odražejícími stěnami, s pohlcujícími stěnami),
- Ehrenfestův myšlený pokus - a rozlišitelných molekul rozdělených do nádob A a B , v každém kroku se zvolí jedna molekula (s pravděpodobností $1/a$) a přemístí do opačné nádoby,
- posloupnost nezávislých opakovaných pokusů.

4.1 Klasifikace stavů MŘ

Věta 4.3 (•). Mějme E_j stav v Markovově řetězci. Je-li systém ve stavu E_j , každý průchod stavem E_j je rekurentní jev. Je-li na počátku ve stavu E_i , je to rekurentní jev se zpožděním.

Věta 4.4. V MŘ je stav E_j

- přechodný, právě když $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} < \infty$,
- trvalý nulový, právě když $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \infty$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{jj}^{(n)} = 0$.

Věta 4.5. Je-li v Markovově řetězci stav E_j

- trvalý nenulový neperiodický, potom $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{jj}^{(n)} = \frac{1}{\mu_j}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{f_{ij}}{\mu_j}$,
- obdobně pro periodický $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{jj}^{(n\lambda)} = \frac{\lambda}{\mu_j}$.

4.2 Nerozložitelné řetězce

Definice 4.3. Stav E_k je **dosažitelný** z E_j , jestliže $\exists n \geq 0$ t.ž. $p_{jk}^{(n)} > 0$.

Definice 4.4. Neprázdna množina stavů C je **uzavřená**, jestliže žádný stav vně C není dosažitelný ze stavů v C . Taková množina je opět MŘ (podřetězec).

Definice 4.5. **Absorbční stav** je prvek jednobodové uzavřené množiny ($p_{jj} = 1$).

Věta 4.6. Množina stavů C je uzavřená, právě když $\forall E_j \in C, E_k \notin C : p_{jk} = 0$.

Definice 4.6. MŘ je **nerozložitelný**, pokud jediná jeho uzavřená množina je množina všech stavů.

Věta 4.7. Řetězec je nerozložitelný, právě když každý stav je dosažitelný z každého.

Definice 4.7. Stavy E_j a E_k jsou stejného typu, pokud jsou oba přechodné, resp. oba trvale nulové, resp. oba trvale nenulové a současně mají stejnou periodicitu.

Věta 4.8. Pokud jsou dva stavy vzájemně dosažitelné, jsou stejného typu. V nerozložitelném MŘ jsou všechny stavy téhož typu.

Věta 4.9. V MŘ s konečně stavy neexistují nulové stavy a není možné, aby všechny stavy byly přechodné.

4.3 Stacionární rozdělení

Definice 4.8 (• Stacionární rozdělení). Mějme nerozložitelný MŘ s maticí pravděpodobností přechodů P . Rozdělení $\{v_j\}$ se nazývá stacionární rozdělení řetězce, pokud

$$\forall j : v_j = \sum_i v_i p_{ij}, \text{ tj. } \mathbf{v} = P^T \mathbf{v}$$

(tj. zachovává pro jednotku času „rozložení částic“).

Poznámka. Stacionární rozdělení zřejmě udává pravděpodobnosti stavů po ustálení systému (pokud stacionární rozdělení existuje).

Věta 4.10 (•). V nerozložitelném MŘ existuje stacionární rozdělení, právě když všechny stavy jsou trvalé nenulové. Toto rozdělení v je jediné a $\forall i, j$ platí:

$$\begin{aligned} v_j &= \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} > 0 && \text{v neperiodickém případě} \\ v_j &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_{ij}^{(k)} > 0 && \text{v periodickém případě} \end{aligned}$$

Důsledek (•). V nerozložitelném MŘ s konečně mnoha stavy existuje stacionární rozdělení.

Definice 4.9. Matice s nezápornými prvky t.ž. všechny řádkové i sloupcové součty jsou jedna se nazývá **dvojně stochastická**.

Věta 4.11. Pro nerozložitelný MŘ s dvojně stochastickou maticí a nekonečným počtem stavů stacionární rozdělení neexistuje, pro konečný počet stavů n je stacionární rozdělení rovnoměrné ($v_i = 1/n$).

Definice 4.10 (•• Isingův model). Máme graf $G = (V, E)$, každý vrchol i má stav $\sigma_i \in \{-1, +1\}$ (obecně $\{1, \dots, K\}$, např. barvy). Vektor σ popisuje stav systému. Prostor stavů S je $\{-1, +1\}^{|V|}$.

Isingův model je pravděpodobnostní rozdělení $\pi(\beta)$ na prostoru stavů S , kde

$$\begin{aligned}\pi(\beta) &= C_\beta^{-1} e^{-\beta H(\sigma)} \\ H(\sigma) &= \sum_{(i,j) \in E} I[\sigma_i \neq \sigma_j] \quad (\text{Hamiltonián - „energie stavů“}) \\ C_\beta &= \sum_{\sigma^* \in S} e^{-\beta H(\sigma^*)}\end{aligned}$$

Pro $\beta > 0$ jsou v daném modelu nejpravděpodobnější konfigurace stavů, pro něž je Hamiltonián malý (malá energie, informace).

Aplikace v analýze obrazu - pixely jsou vrcholy, hrany spojují sousední pixely, stavy odpovídají barvám. Obrázek je reprezentován vektorem $\sigma \in S$, pozorujeme zašuměný obraz $Y = \sigma + \varepsilon$, kde $\varepsilon_i \sim N(0, \delta^2)$. Chtěli bychom odhadnou skutečný obraz, pozorujeme-li Y a předpokládáme, že σ má rozdělení $C_\beta^{-1} e^{-\beta H(\sigma)}$. Řešíme Bayesovskou statistikou a MŘ (náhodná procházka grafem, hledáme stacionární rozdělení – zřejmě to, co se učí v UI II jako MCMC). Možnosti jsou generovat z aposteriorního rozdělení $\mathcal{L}(\sigma|Y)$ konfigurace jako možné reprezentace obrazu, nebo hledat $\hat{\sigma}$ maximalizující $P(\hat{\sigma}|Y)$.

Varianty pro $S = \{1, \dots, K\}^{|V|}$:

- Potův model – $H(\sigma) = \sum_{(i,j) \in E} I[\sigma_i \neq \sigma_j]$
- model pro černobílé obrázky – $H(\sigma) = \sum_{(i,j) \in E} f(\sigma_i, \sigma_j)$ pro nějakou metriku f

Poznámka. C_β^{-1} je normalizační konstanta, která z $\pi(\beta)$ dělá rozdělení (součet přes všechna σ musí být 1).

Příklad. Nalezněte stacionární rozdělení pro náhodnou procházku s dvěma odrážejícími stěnami.

Pro $p = 1/2$ vyjde rovnoměrné (dvojně stochastická matice).

Příklad. Mějme náhodnou procházku s jednou odrážející stěnou. Její matice P je

$$P = \begin{pmatrix} q & p & 0 & \dots \\ q & 0 & p & \dots \\ 0 & q & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Je nerozložitelný, stacionární rozdělení najdu ze vztahu $\mathbf{v}_j = q\mathbf{v}_{j-1} + p\mathbf{v}_{j+1}$. Pokud $\sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{v}_j$ konverguje, stacionární rozdělení existuje. Z nerozložitelnosti by potom stavy byly nenulové a trvalé.

Příklad. Nalezněte stacionární rozdělení pro Ehrenfestův myšlený pokus s N částicemi. Sestavíme matici P a hledáme \mathbf{v} t.ž. $\mathbf{v}^T = \mathbf{v}^T P$. Pro stav E_n dostaneme rovnici

$$\mathbf{v}_n = \left(1 - \frac{n-1}{N}\right)\mathbf{v}_{n-1} + \frac{n+1}{N}\mathbf{v}_{n+1}, \quad \mathbf{v}_0 = \frac{1}{N}\mathbf{v}_1.$$

Pomocí „kouzel s násobením“ by mělo vyjít $\mathbf{v}_n = \binom{N}{n}\mathbf{v}_0$. \mathbf{v}_0 potom zjistíme takto:

$$\sum_{n=0}^N \binom{N}{n} \mathbf{v}_0 = 1$$

$$2^N \mathbf{v}_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_0 = 2^{-N}$$

5 Lineární proces zrodu a zániku

Definice 5.1. Náhodná veličina X má exponenciální rozdělení $Exp(\lambda)$, pokud má hustotu

$$f(x, \lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0, \lambda > 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

$$EX = \frac{1}{\lambda}, \text{ var } X = \frac{1}{\lambda^2}, F(x) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Věta 5.1 (•). Exponenciální rozdělení je jediné spojitě rozdělení, pro které platí

$$P(X > x + y | X > x) = P(X > y).$$

Mezi diskrétními rozděleními má tuto vlastnost pouze geometrické. X můžeme interpretovat jako dobu života procesu, potom pravděpodobnost přežití časového období nezávisí na tom, jakou dobu proces doposud přežil.

Definice 5.2 (• Funkce intenzity). Nechť náhodná veličina X má hustotu $f(x)$ a distribuční funkci $F(x)$. Funkce intenzity je

$$\Lambda(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}.$$

Poznámka. Mějme náhodnou veličinu X (doba života procesu) s hustotou f , distribuční funkci F . Pravděpodobnost okamžitého selhání je $\Delta\Lambda(x)$:

$$P(x < X \leq x + \Delta | X > x) = \frac{F(x + \Delta) - F(x)}{1 - F(x)} \frac{\Delta}{\Delta} \xrightarrow{\Delta \rightarrow 0} \Delta\Lambda(x)$$

Poznámka. Funkce intenzity jednoznačně charakterizuje rozdělení.

Poznámka (•). Exponenciální rozdělení je jediné spojitě rozdělení s konstantní funkcí intenzity (λ).

Definice 5.3 (• Lineární proces zrodu a zániku). Mějme systém s nejvýše spočetně stavy, pravděpodobnosti přechodů v časovém intervalu $(t, t + h)$ jsou:

$$\begin{aligned} P(E_n \rightarrow E_{n+1}) &= \lambda_n h + o(h) \\ P(E_n \rightarrow E_{n-1}) &= \mu_n h + o(h) \\ P(E_n \rightarrow E_{n \pm j}, j > 1) &= o(h) \end{aligned}$$

(Markovský proces se spojitým časem a diskrétními stavy.)

Značení. Pravděpodobnost toho, že systém je v čase t ve stavu E_n budeme značit $P_n(t)$. Limitu označíme $p_n = \lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t)$.

Poznámka. Zajímá nás $P_n(t + h)$ a p_n .

Věta 5.2 (••). Pravděpodobnosti p_n existují, nezávisí na počátečních podmínkách a vyhovují systému lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} 0 &= -\lambda_0 p_0 + \mu_1 p_1 \\ 0 &= -(\lambda_n + \mu_n) p_n + \mu_{n+1} p_{n+1} + \lambda_{n-1} p_{n-1}, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

Pravděpodobnosti $P_n(t)$ splňují následující systém diferenciálních rovnic:

$$\begin{aligned} P'_0(t) &= -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t) \\ P'_n(t) &= -(\lambda_n + \mu_n) P_n(t) + \mu_{n+1} P_{n+1}(t) + \lambda_{n-1} P_{n-1}(t), \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

Důkaz. Odvození: Hledáme $P_n(t + h)$ pro nějaké malé h .

$$\begin{aligned} P_n(t + h) &= (1 - \lambda_n h - \mu_n h + o(h)) P_n(t) \\ &\quad + (\mu_{n+1} h + o(h)) P_{n+1}(t) \\ &\quad + (\lambda_{n-1} h + o(h)) P_{n-1}(t) \\ &\quad + o(h) P_{n \pm k}(t) \end{aligned}$$

(Součet pravděpodobností setrvání v P_n , přechodu z P_{n+1} , přechodu z P_{n-1} a přechodu ze vzdálenějšího stavu.) Vydělíme rovnice $h \rightarrow 0$ a zanedbáme členy $\frac{o(h)}{h}$:

$$\begin{aligned} \frac{P_n(t + h) - P_n(t)}{h} &= P'_n(t) = (-\lambda_n - \mu_n) P_n(t) + (\mu_{n+1}) P_{n+1}(t) + (\lambda_{n-1}) P_{n-1}(t) \\ P'_0(t) &= -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t) \end{aligned}$$

Je-li systém v čase 0 ve stavu E_i , pak jsou splněny počáteční podmínky $P_i(0) = 1$ a $P_n(0) = 0$ pro $n \neq i$. Limity v nekonečnu p_n dostaneme z diferenciálních rovnic položením $P'_n(t) = 0$. ♡

5.1 Příklady

Příklad. Mějme systém z prvků, kde se za čas h rozdělí jeden prvek s pravděpodobností $\lambda h + o(h)$ a zanikne s pravděpodobností $\mu h + o(h)$. Je-li chování prvků nezávislé, jde o model zrodu a zániku s $\lambda_n = n\lambda$, $\mu_n = n\mu$.

Příklad (Model ústředny s nekonečně linkami). Mějme ústřednu, hovor skončí v intervalu $(t, t + h)$ s pravděpodobností $\mu h + o(h)$, nová linka se obsadí s pravděpodobností $\lambda h + o(h)$, hovory jsou nezávislé. Ukažte, že limitní pravděpodobnosti p_n se řídí Poissonovým rozdělením s parametrem $\frac{\lambda}{\mu}$.

Důkaz. Jde o model zrodu a zániku s $\lambda_n = \lambda$, $\mu_n = n\mu$. Z rovnic z věty 5.2 plyne:

$$\begin{aligned} 0 &= -\lambda p_0 + \mu p_1 \\ 0 &= -(\lambda + n\mu)p_n + (n+1)\mu p_{n+1} + \lambda p_{n-1} \\ p_1 &= \frac{\lambda}{\mu} p_0 \\ p_2 &= \frac{\lambda^2}{2\mu^2} p_0 \\ &\dots \\ p_n &= \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 \end{aligned}$$

Z existence stacionárního rozdělení plyne $\sum p_n = 1$ (?).

$$p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = p_0 e^{\frac{\lambda}{\mu}}$$

Odtud $p_0 = e^{-\frac{\lambda}{\mu}}$ a

$$p_n = \frac{e^{-\frac{\lambda}{\mu}}}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \sim Po\left(\frac{\lambda}{\mu}\right).$$

♡

Poznámka. Pokud bychom předchozí příklad simulovali, dostali bychom prý střední hodnotu a rozptyl $\frac{\lambda}{\mu}$, ale nebylo by zřejmé, že mají pravděpodobnosti Poissonovo rozdělení.

Příklad (Dvojbudka s jednou neomezenou frontou).

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \lambda \\ \mu_n &= \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \mu & n = 1 \\ 2\mu & n \geq 2 \end{cases} \\ p_n &= p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

p_0 spočteme pomocí součtu geometrické řady $p_0 + \frac{\lambda}{\mu}p_0 + \frac{\lambda^2}{2\mu^2}p_0 + \dots = 1$.

$$p_0 = \frac{2\mu - \lambda}{2\mu + \lambda}, \quad p_n = \frac{2\mu - \lambda}{2\mu + \lambda} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{2^{n-1}}$$

Příklad (Parkoviště MFF kapacity N bez fronty).

$$\begin{aligned}\lambda_n &= \lambda \\ \mu_n &= n\mu, \quad 0 \leq n \leq N\end{aligned}$$

Jako ústředna

$$p_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n p_0.$$

p_0 dostaneme z rovnice

$$p_0 \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n = 1$$

(useknuté Poissonovo rozdělení).

Příklad (Jedna telefonní budka s frontou omezenou N).

$$\begin{aligned}\lambda_n &= \lambda \\ \mu_n &= \mu, \quad 0 \leq n \leq N \\ p_n &= \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n p_0 \\ 1 &= p_0 \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{N+2} - 1}{\frac{\lambda}{\mu} - 1}\end{aligned}$$

($N+2$ sčítanců, protože může být fronta dlouhá 1 až N lidí, nebo fronta prázdná a budka obsazená, nebo fronta prázdná i budka prázdná).

Příklad (1 opravář na M strojů).

$$\begin{aligned}\lambda_n &= \lambda(M-n) \quad (\text{pokud se porouchalo } n \text{ strojů, může se ještě porouchat } M-n) \\ \mu_n &= \mu \quad (\text{konstantní intenzita práce opraváře})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_n &= \frac{M!}{(M-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n p_0, \quad p_{M-n} = M! \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^M \frac{1}{n!} \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^n p_0 \\ 1 &= p_0 M! \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^M \sum_{n=0}^M \frac{1}{n!} \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^n\end{aligned}$$

(Inverze parkoviště, useknuté Poissonovo rozdělení s převráceným parametrem $\frac{\mu}{\lambda}$ a $M! \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^M$ slouží jako normalizační konstanta.)

Příklad. Mějme systém, který může být ve dvou stavech – fungující, rozbitý. Intenzita poruchy je λ (střední doba poruchy $\frac{1}{\lambda}$), střední doba opravy $\frac{1}{\mu}$.

$$p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \quad p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

Příklad (Oficina se dvěma židlemi v pipeline). Mějme model oficíny se dvěma židlemi bez fronty. Stavy budou $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(W,1)$, kde 1 indikuje obsazenost a W čekání. Příchody zákazníků mají intenzitu λ , doba na 1. židli μ_1 , doba na 2. židli μ_2 .

5.2 Poissonův proces jako model zrodu a zániku

Definice 5.4 (•). Označme $P_n(t)$ pravděpodobnost jevu, že za dobu t nastalo n změn (např. rozpad atomů). Předpokládejme, že proces je stacionární (nezávisí na poloze a délce intervalu) a bez ohledu na historii pravděpodobnost jedné změny za čas h je $\lambda h + o(h)$, více změn $o(h)$.

Definice 5.5 (Poissonův proces). Poissonův proces s intenzitou $\lambda > 0$ je čítací proces $\{N(t), t \geq 0\}$ (počty událostí v intervalu $[0, t]$) takový, že

- (i) $N(0) = 0$,
- (ii) přírůstky jsou nezávislé a stacionární (každé dva disjunktní časové intervaly mají stejnou distribuci),
- (iii) $P(N(h) = 1) = \lambda h + o(h)$ pro $h \rightarrow 0$,
- (iv) $P(N(h) \geq 2) = o(h)$ pro $h \rightarrow 0$;

nebo ekvivalentně

- (i) $N(0) = 0$,
- (ii) přírůstky jsou nezávislé,
- (iii) počet událostí v libovolném intervalu délky $h > 0$ má rozdělení $Po(\lambda h)$.

Věta 5.3. Platí $P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}$.

Důkaz. Označme $P_0(t) = P(N(t) = 0)$. Platí

$$\begin{aligned} P_0(t+h) &= P_0(t)(1 - \lambda h + o(h)) \\ \frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} &= -P_0(t)\lambda + \frac{o(h)}{h} \\ P'_0(t) &= -P_0(t)\lambda \end{aligned}$$

Pro počáteční podmínku $P_0(0) = 1$ řešení diferenciální rovnice odpovídá. ♡

Věta 5.4. Doba mezi událostmi v homogenním Poissonově proces má rozdělení $Exp(\lambda)$.

Důkaz. Pro dobu čekání na první událost T_1 platí $P(T_1 > t) = P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}$, takže $P(T_1 \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$, což je distribuční funkce exponenciálního rozdělení. Díky nezávislosti vychází $P(T_2 > s+t \mid T_1 = s)$ stejně a indukci pro všechna T_i . ♡

Věta 5.5. Doba čekání na n -tou událost se řídí rozdělením $\Gamma(n, \lambda)$.

Důkaz. Označme T_i doby čekání na události, $S_n = T_1 + \dots + T_n$. Z konvoluce plyne indukci hustota S_n jako

$$\Gamma(n, \lambda) = \lambda e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{n-1}}{\Gamma(n)} = \lambda e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}$$

Pro velké n konverguje k normálnímu rozdělení (viz Věta 3.6). ♡

Věta 5.6. Obě definice z Definice 5.5 jsou ekvivalentní, tj. počet událostí v intervalu délky t má rozdělení $Po(\lambda t)$.

Důkaz. Plyne z $P(N(t) = n) = P(S_n \geq t) - P(S_{n+1} \leq t) = I_n - I_{n+1}$, kde $I_k = \int_0^t \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} e^{-\lambda x} x^{k-1} dx$. ♥

Příklad. Mějme server, na který chodí málo časté požadavky s intenzitou $\lambda = 1/\text{den}$. Určete (a) střední dobu do příchodu 10 požadavků a (b) pravděpodobnost, že mezi 10. a 11. požadavkem jsou dva dny.

(a) Doby čekání na požadavky T_i mají exponenciální rozdělení, a tedy střední hodnotu $1/\lambda = 1$. Odtud $E[S_{10}] = \sum_{i=1}^{10} E[T_i] = 10 \cdot 1 = 10$

(b) Z Věty 5.4:

$$P(T_{11} - T_{10} > 2) = P(T_i > 2) = e^{-\lambda t} = e^{-2}$$

Příklad. Mějme server, na který chodí požadavky s intenzitou $\lambda = 10/\text{hodina}$, s pravděpodobností $p = 1/12$ jsou šifrované, s pravděpodobností $11/12$ nešifrované. Určete pravděpodobnost, že za 1 den nepříjde žádný šifrovaný požadavek.

Označme T_i dobu čekání mezi šifrovanými požadavky. Šifrované požadavky mají intenzitu $\lambda_s = \frac{10}{12}$ za hodinu a jeden den má 24 hodin. Z Věty 5.4:

$$P(T_1 > 24) = e^{-24\lambda_s} = e^{-20}$$

5.3 Systémy hromadné obsluhy

Definice 5.6 (Systém hromadné obsluhy). Mějme systém, kde je

- alespoň jedna paralelní stanice obsluhy,
- zákazníci, kteří nemohou být obslouženi se řadí do jediné fronty,
- doby mezi příchody zákazníků jsou i.i.d. veličiny s rozdělením A ,
- doby obsluhy jsou i.i.d. veličiny s rozdělením B .

Rozdělení A je typicky exponenciální (Markovian), deterministické (Deterministic), obecné (General), Erlangovo (Erlang).

Definice 5.7 (M/M/x). Systém M/M/x je systém hromadné obsluhy s příchody zákazníků řídicími se homogenním Poissonovým procesem a dobami obsluhy s exponenciálním rozdělením.

x odpovídá počtu obslužných stanic:

- M/M/1: $\lambda_n = \lambda, \mu_n = \mu$
- M/M/c:

$$\lambda_n = \lambda, \quad \mu_n = \begin{cases} n\mu & 0 \leq n \leq c \\ c\mu & c \leq n \end{cases}$$

- M/M/ ∞ : $\lambda_n = \lambda, \mu_n = n\mu$

Věta 5.7. Systémy M/M/x lze popsat obecným procesem zrodu a zániku (x obslužných stanic, nekonečná fronta).

Věta 5.8 (•). Pro systém M/M/c platí, že odchody ze stabilizovaného systému (s neomezenou frontou) s parametry λ, μ jsou opět popsány homogenním Poissonovým procesem s parametrem λ .

Důsledek. Systémy M/M/c se dají dobře kombinovat a za předpokladu stabilizovatelnosti popsat vhodným Markovským procesem.

Poznámka. Pro systém M/M/1 platí, že

- Střední počet zákazníků v systému je $\frac{\lambda}{\mu}/(1 - \frac{\lambda}{\mu}) = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$.
- Rozptyl počtu zákazníků je $\frac{\lambda}{\mu}/(1 - \frac{\lambda}{\mu})^2$.
- Střední délka fronty je $\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2/(1 - \frac{\lambda}{\mu})$.

Důkaz. (Pro střední počet zákazníků)

Sestavíme rovnice podle Věty 5.2 pro $\lambda_n = \lambda$, $\mu_n = \mu$, za předpokladu $\mu > \lambda$.

$$\begin{aligned} 0 &= -\lambda p_0 + \mu p_1 \\ 0 &= -(\lambda + \mu)p_n + \mu p_{n+1} + \lambda p_{n-1}, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

Odtud:

$$\begin{aligned} p_n &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 \\ p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n &= 1 \\ p_n &= \left(\frac{\mu - \lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \end{aligned}$$

Vytvořující funkce pro p_n je

$$P(x) = \frac{\mu - \lambda}{\mu} \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}x}.$$

Střední hodnotu počtu zákazníků v systému dostaneme z Věty 2.2:

$$P'(1) = \frac{(\mu - \lambda)\lambda}{(\mu - \lambda \cdot 1)^2} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

♡

Poznámka. Doba T_n strávená zákazníkem, který se v systému M/M/1 zařadil jako n -tý řídí gamma rozdělením $\Gamma(n+1, \mu)$. Je to součet dob jeho obsluhy a obsluh zákazníků před ním $T_i \sim \text{Exp}(\mu)$, $\sum_{i=0}^n T_i \sim \Gamma(n+1, \mu)$.

Definice 5.8 (Tandemové uspořádání). Sériové propojení dvou systémů M/M/1 se nazývá tandemové uspořádání.

Příklad. Mějme dva systémy M/M/1 zapojené za sebou, intenzita příchoďů je λ , intenzita odchodů z prvního systému μ_1 , z druhého μ_2 . Stavy budou (i, j) , kde $i, j \geq 0$ jsou počty zákazníků v systému. Pro limitní rozdělení dostaneme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 0 &= -\lambda p_{0,0} + \mu_2 p_{0,1} \\ 0 &= -(\lambda + \mu_1)p_{m,0} + \mu_2 p_{m,1} + \lambda p_{m-1,0} \\ 0 &= -(\lambda + \mu_2)p_{0,n} + \mu_2 p_{0,n+1} + \mu_1 p_{1,n-1} \\ 0 &= -(\lambda + \mu_1 + \mu_2)p_{m,n} + \mu_2 p_{m,n+1} + \mu_1 p_{m+1,n-1} + \lambda p_{m-1,n} \end{aligned}$$

Jako řešení rovnic by zřejmě mělo vyjít

$$p_{m,n} = \underbrace{\left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_1}\right)}_{M/M/1} \underbrace{\left(\frac{\lambda}{\mu_2}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_2}\right)}_{M/M/1}$$

za předpokladu, že vstup do druhé linky má intenzitu λ , což se dá ukázat, že platí. Pro praktické použití je nutný předpoklad $\lambda \ll \mu_1 + \mu_2$.

6 Ostatní

Poznámka (Střední doba do poruchy). Platí

$$R(t) = P(Y > t) = e^{-\int_0^t \lambda_H(u) du},$$

kde $\lambda_H(t)$ je intenzita poruch (definice 5.2).

Střední doba mezi chybami (MTTE) je obecně

$$\int_0^\infty R(t) dt = \int_0^\infty e^{-\int_0^t \lambda_H(u) du} dt.$$

Nejčastěji se používají rozdělení exponenciální, Weibullovo, gamma, lognormální.

Poznámka. Weibullovo rozdělení:

$$\begin{aligned} f(x, \alpha, \beta) &= \alpha \beta x^{\alpha-1} e^{-\beta x^\alpha} \\ F(x, \alpha, \beta) &= 1 - e^{-\beta x^\alpha} \end{aligned}$$

Používá se v nějakých normách.

Lognormální rozdělení $X \sim LN(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow Y = \ln X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Poznámka. Hledání hodnot parametrů – napozorujeme data, vybereme model, zjistíme, pro jaké hodnoty parametrů je naše pozorování nejpravděpodobnější. Lze hledat i pouze z dat bez modelu – empirická distribuční funkce $\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum I[x_i \leq x]$.

Pokud máme naměřené hodnoty x_1, \dots, x_n veličin s exponenciálním rozdělením a hledám parametr λ , vezmeme $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$. Z $EX = \frac{1}{\lambda}$ a Čebyševovy nerovnosti dostaneme $\lambda \approx \frac{1}{\bar{X}_n}$.