Datum: Jméno:

Písemná část zkouky z VPL.

Počet úloh: 3.

Pokyny pro vypracování.

Odpověď A(no)/N(e) nebo relevantní hodnotu či výraz v nejjednoduím tvaru uveďte do rámečku pro **Odpověď**. Zdůvodnění ka«dé polo«ky odpovědi uveďte do rámečku **Zdůvodnění**, není-li řečeno jinak.

Zdůvodnění se provádí odkazem na relevantní poučky a veobecná fakta a správnou logickou argumentací. Musí být dále dostatečně podrobné; např. argument „plyne to z věty o kompaktnosti“ bez dalího mů«e být principiálně správný, avak nikoli dostatečně podrobný. Vypracování je třeba psát čitelně a přehledně.

Hodnocení.

Úloha je rozřeena správně, se ziskem 2 body, jsou-li vechny její části zodpovězeny správně včetně po«adovaných zdůvodnění; jinak je rozřeena nesprávně. Písemná zkouka je absolvována úspěně resp. dostatečně, jsou-li rozřeeny správně 3 (6 b.) resp. 2 úlohy (4b.); jinak je absolvována nedostatečně. Částečné řeení (plně) správně nerozřeené úlohy mů«e znamenat zisk zlomků bodů a pozitivně ovlivnit úspěnost absolvování písemné zkouky.

Konvence a značení.

Označení symbolů různými písmeny či znaky znamená, «e jde o různé symboly, není-li výslovně uvedeno jinak. (Např.„x, y jsou proměnné“ značí, «e x, y jsou různé proměnné.)

Jednoduchá extenze teorie T je extenze teorie T ve stejném jazyce, jaký má T.

Ohodnocení v prvovýroků $\{p_0, \ldots, p_{l-1}\}$ se značí také jako l-tice $\langle v(p_0), \ldots, v(p_{l-1})\rangle$.

V úlohách z predikátové logiky jsou vechny jazyky a teorie v logice s rovností, není-li výslovně uvedeno jinak.

ÚLOHA 1 [VL]

A) Nech¸ mno«ina $\mathbb{P}$ vech prvovýroků je konečná, T je $\mathbb{P}$-teorie a φ je $\mathbb{P}$-výrok.

a) Uveďte, zda platí: $T \vdash \neg\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \mathsf{M}(T) \cap \mathsf{M}(\varphi) = \emptyset$.

b) Uveďte pomocí $\mathsf{M}(T)$ počet neekvivalentních jednoduchých extenzí teorie T.

Odpověď.

a) A

b) $2^{|\mathsf{M}(T)|}$

Zdůvodnění.

a) $T \vdash \neg\varphi \Leftrightarrow \mathsf{M}(T) \subseteq \mathsf{M}(\neg\varphi) \Leftrightarrow \mathsf{M}(T) \cap -\mathsf{M}(\neg\varphi) = \emptyset \Leftrightarrow \mathsf{M}(T) \cap \mathsf{M}(\varphi) = \emptyset$. U«ili jsme $-\mathsf{M}(\neg\varphi) = \mathsf{M}(\varphi)$.

b) Pro uva«ovanou extenzi S je $\mathsf{M}(S) \subseteq \mathsf{M}(T)$ a různé podmno«iny $\mathsf{M}(T)$ určují jednoznačně různé jednoduché extenze T.

B) Nech¸ mno«ina $\mathbb{P}$ vech prvovýroků je konečná, p, q, r jsou nějaké tři různé prvovýroky z $\mathbb{P}$ a

$$K = \{v \in {}^{\mathbb{P}}2;\ v(p) = 1 = v(r), v(q) = 0\}.$$

a) Napite co nejjednoduí axiomatiku S mno«iny ${}^{\mathbb{P}}2 - K$, tvořenou jen klauzulemi.

b) Uveďte pomocí $\mathbb{P}$ počet neekvivalentních jednoduchých kompletních extenzí teorie S z a).

Odpověď.

a) $S = \{\neg p \vee q \vee \neg r\}$.

b) $7 \cdot 2^{|\mathbb{P}|-3}$.

Zdůvodnění.

a) Jasně je $v(\neg p \vee q \vee \neg r) = 0 \Leftrightarrow v \in K$ pro $v \in {}^{\mathbb{P}}2$.

b) Uva«ovaných teorií je $2^{|\mathbb{P}|} - |K|$, nebo¸ kompletní výroková teorie má právě jeden model.
Je $|K| = 2^{|\mathbb{P}|-3}$, tedy $2^{|\mathbb{P}|} - |K| = 2^{|\mathbb{P}|} - 2^{|\mathbb{P}|-3} = 7 \cdot 2^{|\mathbb{P}|-3}$.

ÚLOHA 2 [PL]

- Buď T teorie v jazyce $\langle < \rangle$ s rovností a binárním predikátovým symbolem $<$, přičem« axiomatika T je $\{\chi_0, \chi_1\}$, kde:
  χ_0 je otevřená formule vyjadřující: „$<$ je ostré lineární uspořádání“,
  χ_1 je axiom hustoty: $(\exists x, y)(x < y)$ & $(\forall x, y)(x < y \rightarrow (\exists z)(x < z < y))$.
- Buďte c, d konstantní symboly, F binární funkční symbol a
  χ_1° buď formule $(\forall x, y)(c < d \mathbin{\&} (x < y \rightarrow (x < F(x, y) < y)))$, S buď $\langle <, c, d, F \rangle$-teorie s axiomatikou $\{\chi_0, \chi_1^\circ\}$.

A) Která z následujících tvrzení platí? (A/N)

a) Teorie T je otevřeně axiomatizovatelná.
b) Formule $(\exists u, v)(\forall x, y)(\exists z)(u < v \mathbin{\&} (x < y \rightarrow x < z < y))$ je ekvivalentní s χ_1.
c) χ_1° je Skolemova varianta nějaké formule ekvivalentní s χ_1.
d) S je konzervativní extenze T.

Odpověď.

a) N
b) A
c) A
d) A

Zdůvodnění.

a) Model T je v«dy nekonečný, má vak konečnou podstrukturu a ta tedy není modelem T. Tudí« T není otevřeně axiomatizovatelná.
b) Uvedená formule se získá snadno z χ_1 prenexními operacemi, tedy je ekvivalentní s χ_1. (Podformule $(\exists x, y)(x < y)$ se nahradí variantou $(\exists u, v)(u < v)$ a pak se postupně vytknou kvantifikátory.)
c) Podle definice je sentence χ_1° Skolemova varianta sentence z b).
d) Proto«e je χ_1° Skolemova varianta ekvivalentu axiomu χ_1 v prenexním tvaru, je extenze T' teorie T o χ_1° konzervativní extenze T (co« plyne z věty o extenzi o funkční symbol). Díky $\vdash \chi_1^\circ \rightarrow \chi_1$ vynecháním axiomu χ_1 získáme teorii ekvivalentní s T' a je to ovem teorie s axiomatikou $\{\chi_0, \chi_1^\circ\}$, tj. teorie S.

B) Buď S' extenze S o definovaný relační symbol R definicí $R(z) \leftrightarrow (\exists x, y)(z = F(x, y))$.

a) Nech¸ φ je $L(S')$-formule $(\forall x)(c < x \rightarrow R(x))$ a φ^* její dR-překlad do S. Napite φ^*.
b) Existuje $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{Q}$ tak, aby struktura $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, 0, 1, f \rangle$ byla modelem S?
c) Platí $S' \vdash (\forall z)R(z)$?

Odpověď.

a) $(\forall x)(c < x \rightarrow (\exists y, y')(x = F(y, y')))$ (s y, y' různými od z, x).
b) A
c) N

Zdůvodnění.

a) dR-překlad se získá dle definice nahrazením ka«dé podformule $R(t)$ variantou definující formule o termu t, ve které není «ádná proměnná formule φ kvantifikovaná. V naem případě dostaneme např. uvedené.
b) $f(a, b)$ je z $(a, b) \cap \mathbb{Q}$ resp. je 0, kdy« $a < b$ resp. jinak. (U«ilo se: Mezi ka«dými dvěma různými reálnými čísly le«í ostře racionální číslo.)
c) Buď $\mathcal{A}'$ jednoznačná expanze $\mathcal{A}$ z b) do modelu S'. Pak $\mathcal{A}' \not\models (\forall z)R(z)$ a tedy $S' \nvdash (\forall z)R(z)$.

ÚLOHA 3 [PL] Buď T teorie v jazyce $\langle c_0, c_1\rangle$ s rovností a konstantními symboly c_0, c_1, přičem« T nemá mimologické axiomy. Buď T_n jednoduchá extenze T o formuli „existuje právě n prvků“ s $0 < n \in \mathbb{N}$, T_∞ jednoduchá extenze T o schema „existuje nekonečně prvků“.

A) Která z následujících tvrzení platí? (A/N)

- a) $\mathrm{I}(\kappa, T) = 3$ (pro ka«dou velikost (kardinalitu) $\kappa > 1$).
- b) Ka«dé T_n je kompletní.
- c) Ka«dé T_n má eliminaci kvantifikátorů.
- d) Ka«dé T_n má algebraický prvomodel.

Odpověď.

- a) N
- b) N
- c) A
- d) N

Zdůvodnění.

- a) Pro $\kappa > 1$ je $\mathrm{I}(\kappa, T) = 2$, nebo¸ modely $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ velikosti $\kappa > 1$ jsou izomorfní, právě kdy« jsou oba modely extenze $T^{=}$ resp. $T^{\neq}$ teorie T o axiom $c_0 = c_1$ resp. $c_0 \neq c_1$.
- b) Kompletní je jen T_1; jinak je $c_0 = c_1$ nezávislá sentence T_n.
- c) T_n je jasně f-homogenní. (Dokonce dva modely teorie T té«e velikosti a takové, «e mezi nimi existuje konečné parciální vnoření, jsou izomorfní.)
- d) Pro $n > 1$ nemá T_n algebraický prvomodel, nebo¸ jinak by byla díky eliminaci kvantifikátorů kompletní, co« není.

B) Buď S extenze T o spočetně dalích konstantních symbolů $\{d_n;\, n \in \mathbb{N}\}$.

- a) Je S konzervativní extenze T?
- b) Buď $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Q}, 0, 1, n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ model S. (Je tedy $c_0^{\mathcal{A}} = 0, c_1^{\mathcal{A}} = 1$, $d_n^{\mathcal{A}} = n$.) Uveďte mno«inu W právě vech $a \in \mathbb{Q}$ takových, «e $\{a\}$ je definovatelné bez parametrů v $\mathcal{A}$.

Odpověď.

- a) A
- b) $W = \mathbb{N}$.

Zdůvodnění.

- a) Buď φ nějaká $L(T)$-formule, $S \vdash \varphi$. Podle věty o konstantách platí $T \vdash \varphi$. Jiný způsob. Buď $\mathcal{A} \models T$. Pak $\mathcal{A}' \models \varphi$, kde $\mathcal{A}'$ je expanze $\mathcal{A}$ do modelu S; tudí« $\mathcal{A} \models \varphi$. Tedy máme $T \models \varphi$ a kompletnost predikátové logiky dá $T \vdash \varphi$.
- b) Pro $a \in \mathbb{N}$ je $\{a\}$ definováno formulí $x = d_a$; tedy $\mathbb{N} \subseteq W$. Pro $a \in \mathbb{Q} - \mathbb{N}$ existuje automorfismus h struktury $\mathcal{A}$ tak, «e $a \neq h(a)$ $(\in \mathbb{Q} - (\mathbb{N} \cup \{a\}))$. Tedy a nemů«e být definovatelné bez parametrů v $\mathcal{A}$.