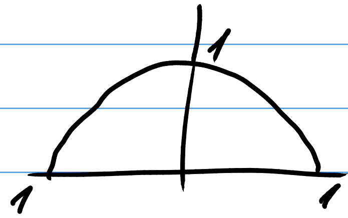
# Řešení zk. pís. A – MA3

## ① Těžiště půlkruhu




x-ová souř. je 0 ze symetrie

příp. můžeme i podle vzorce:

$$\int_\Omega x = \int_0^1 \Big( \underbrace{\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x \, dx}_{=0 \text{ pro lib. } y} \Big) dy \qquad \left( = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-r}^{r} = \frac{r^2}{2} - \frac{(-r)^2}{2} = 0 \right)$$

y-ová souř. je $\dfrac{\int_\Omega y}{\int_\Omega 1} = \dfrac{A}{B}$

$$A = \int_{-1}^{1} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y \, dy \, dx = \int_{-1}^{1} \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 \frac{1-x^2}{2} = \left[\frac{x}{2} - \frac{x^3}{6}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \underline{\frac{1}{3}}$$

$B = \frac{\pi}{2}$ (polovina obs. kruhu) (nebo %)

Závěr: těžiště má souř. $\underline{\left(0, \frac{2}{3\pi}\right)}$

Pozn. 1) A šlo počítat i v opačném pořadí, s malinko ošklivějším integrálem.

2) Pro připomenutí:

$$B = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} 1 \, dy \, dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\, \cos t \, dt$$

subst. $x = \sin t$

$t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$dx = \cos t \, dt$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t \, dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2} = \frac{\pi}{2} + \left[\frac{\sin 2t}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

(2) $$f(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 \cdot \log k \cdot k^x}$$

a) $D_f$ : všechny sčítance jsou dobře def. $\forall x \in \mathbb{R}$, $k \geq 2$

musíme ověřit, kdy vyjde $f(x) \in \mathbb{R}$ (a ne $\infty$)

z MA1 si pamatujeme, že

$$\sum \frac{1}{k^\alpha} < \infty \iff \alpha > 1$$

$$\sum \frac{1}{k \log k} = \infty$$

Odsud srovnávacím kritériem:

$$x > -1 \Rightarrow \frac{1}{k^2 \log k \, k^x} < \frac{1}{k^{2-x}} \quad \& \quad 2-x > 1 \ldots \text{konv.}$$

$$x \leq -1 \Rightarrow \frac{1}{k^2 \log k \, k^x} \geq \frac{1}{k \log k} \Rightarrow \text{div.}$$ (tohle nebylo potřeba)

---

b) $f(x)$ je na $(-1, \infty)$ spojitá. Ověříme spojitost v $x_0 > -1$. Zvolme $t \in (-1, x_0)$. Ukážeme, že na intervalu $[t, \infty)$

$$\sum \frac{1}{k^2 \log k \, k^x} \rightrightarrows f(x),$$ a protože

$\frac{1}{k^2 \lg k\, k^x}$ je tk spoj. funkce (a tedy i částečné součty jsou spoj.) tak z Cauchyovy věty je $f(x)$ spoj. na $[t, \infty)$, tedy i v $x_0$.

Zbývá ověřit stejn. konvergenci. Užijeme Weierstrass. krit.:

$$M_k = \left\| \frac{1}{k^2 \lg k\, k^x} \right\|_{sup} = \frac{1}{k^2 \lg k\, k^t} \le \frac{1}{k^{2+t}}, \qquad 2+t > 1$$

($k^{-x}$ je kles. fce)

$$\Downarrow$$

$\sum M_k < \infty$ a řada konv. stejn. na $[t, \infty)$

c) Derivováním člen po členu to vypadá, že

$$f'(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 \lg k} \left(k^{-x}\right)' = \sum \frac{\cancel{\lg k} \cdot k^{-x} \cdot (-1)}{k^2 \cancel{\lg k}}$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{-1}{k^{2+x}}$$

$$f'(0) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{-1}{k^2} = -\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right) + 1 = 1 - \frac{\pi^2}{6}$$

Pro ověření, že takto lze derivaci provést užijeme Weierstrassovu větu:

1) $\sum \frac{1}{k \log^2 k^x}$ konverguje pro nějž. $x \in (-1, \infty)$

(víme, že konv. dokonce pro všechy)

2) $\sum \frac{-1}{k^{2+x}}$ konverguje lok. stejn. na $(-1, \infty)$

... obdobně jako v části b: $\forall t > -1$ ověříme st. konv.

na $[t, \infty)$ pomocí Weierstrassova krit.;

$M_k = \frac{1}{k^{2+t}}$ a $\sum M_k < \infty$.

(3) $g(x) = \cos^2 x + |x - \pi/4|$ na $(-\pi, \pi)$

Označme $g_1(x)$ $2\pi$-periodické rozšíření $g$ na $\mathbb{R}$, v bodě nespojitosti $x = \pi$ definujeme $g_1$ tak, aby

$$g_1(\pi) = \frac{g_1(\pi_-) + g_1(\pi_+)}{2} = \frac{\left(1 + |\pi - \frac{\pi}{4}|\right) + \left(1 + |-\pi - \frac{\pi}{4}|\right)}{2}$$

$$= \underline{1 + \pi}$$

Začneme „od konce" až spočteme koef. $a_k, b_k$, tak dle Four. věty ($g_1$ je po částech spoj., po č. hladká na $[-\pi, \pi]$) tak dle Fourierovy věty

$$\frac{a_0}{2} + \sum \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right)$$

konverguje ke $\frac{g_1(x_-) + g_1(x_+)}{2} = g_1(x)$ (protože jsme definovali $g_1(\pi)$ tak chytře).

Počítejme tedy Fourier. koeficienty.

Budeme zvlášť zkoumat $\cos^2 x$ a $|x-\frac{\pi}{4}|$,

výsledek bude součet.

Podle součtových vzorců je $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$,

čímž máme FŘ pro $\cos^2 x$.

Fce $|x-\frac{\pi}{4}|$ dá více práce.

Označme $F_k(x) = \int \left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cos kx$

$G_k(x) = \int \left(x-\frac{\pi}{4}\right)\sin kx$ (spočteme později)

Pak

$$a_k\left(\text{pro } |x-\tfrac{\pi}{4}|\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x-\tfrac{\pi}{4}| \cos kx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi/4} -\left(x-\tfrac{\pi}{4}\right)\cos kx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi/4}^{\pi}\left(x-\tfrac{\pi}{4}\right)\cos kx$$

$$= \left[-\left(F_k(\pi/4) - F_k(-\pi)\right) + \left(F_k(\pi) - F_k(\tfrac{\pi}{4})\right)\right] / \pi$$

$$= \left[F_k(\pi) + F_k(-\pi) - 2F_k(\pi/4)\right] / \pi$$

obdobně

$$b_k = \left[G_k(\pi) + G_k(-\pi) - 2G_k(\pi/4)\right] / \pi$$

$$F_k(x) = \int \underbrace{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}_{f} \underbrace{\cos kx}_{g'} = \underbrace{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}_{f} \underbrace{\frac{\sin kx}{k}}_{g} - \int \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{\frac{\sin kx}{k}}_{g}$$

$$= \underline{\underline{\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \frac{\sin kx}{k} + \frac{\cos kx}{k^2}}} \quad (+C) \quad \text{zvolíme } C=0$$

$$G_k(x) = \int \left(x-\frac{\pi}{4}\right) \sin kx = -\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\frac{\cos kx}{k} + \int 1 \cdot \frac{\cos kx}{k}$$

$$= \underline{\underline{-\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\frac{\cos kx}{k} + \frac{\sin kx}{k^2}}}$$

Dosadíme

$$a_k = \left(F_k(\pi) + F_k(-\pi) - 2F_k(\pi/4)\right) / \pi$$

$$= \underline{\underline{\frac{2\cos(k\pi)}{\pi k^2} - \frac{2\cos(k\pi/4)}{\pi k^2}}}$$

(mohli bychom ještě dosadit $\cos k\pi = (-1)^k$

$\cos k\pi/4 = 0, \pm 1, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

(podle $k \bmod 4$)))

$$b_k = \left(G_k(\pi) + G_k(-\pi) - 2G_k(\pi/4)\right) / \pi$$

$$= \left(-\frac{3}{4}\pi \frac{\cos k\pi}{k} + \frac{5}{4}\pi \frac{\cos k\pi}{k} - 2\frac{\sin k\pi/4}{k^2}\right) / \pi$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\cos k\pi}{k} - \frac{2\sin(k\pi/4)}{\pi k^2}$$

Four. koef. pro $g(x)$ se liší o $\cos^2 x$,

tj. $a_0$, $a_2$ jsou o $\frac{1}{2}$ vyšší.