Datum: Jméno:

Písemná část zkoušky z VPL.

Počet úloh: 3.

Pokyny pro vypracování.

Odpověď Ano/Ne nebo relevantní hodnotu či výraz v nejjednodušším tvaru uveďte do rámečku pro **Odpověď**. Jde-li o výběr ze seznamu a), b), c), ..., uveďte tam všechny správné možnosti (a tedy nekroužkujte). Je-li požadováno **zdůvodnění**, uveďte je do příslušného rámečku; v případě výběru ze seznamu a), b), c), ... zdůvodněte též nevybrání položek.

Zdůvodnění se provádí odkazem na relevantní poučky a všeobecná fakta a správnou logickou argumentací. Musí být dále dostatečně podrobné; např. argument „plyne to z věty o kompaktnosti" bez dalšího může být principiálně správný, avšak nikoli dostatečně podrobný. Vypracování je třeba psát čitelně a přehledně.

Hodnocení.

Úloha je rozřešena správně, jsou-li všechny její části zodpovězeny správně včetně požadovaných zdůvodnění; jinak je rozřešena nesprávně. Písemná zkouška je absolvována úspěšně resp. dostatečně, jsou-li rozřešeny správně 3 resp. 2 úlohy; jinak je absolvována nedostatečně. Částečné řešení (plně) správně nerozřešené úlohy může pozitivně ovlivnit úspěšnost absolvování písemné zkoušky.

Konvence a značení.

Označení symbolů různými písmeny či znaky znamená, že jde o různé symboly, není-li výslovně uvedeno jinak. (Např. „x, y jsou proměnné" značí, že x, y jsou různé proměnné.)

V úlohách z predikátové logiky jsou všechny jazyky a teorie v logice s rovností, není-li výslovně uvedeno jinak.

ÚLOHA 1 [VL]

Buď $\mathbb{P}$ množina všech prvovýroků s $|\mathbb{P}| = l \in \mathbb{N}$ a T buď $\mathbb{P}$-teorie.

A) Právě kolik je neekvivalentních vyvratitelných výroků teorie T?

Odpověď: $2^{2^l - |\mathsf{M}(T)|}$

Uveďte zdůvodnění.

φ je vyvratitelný výrok teorie $T \Leftrightarrow \mathsf{M}(T) \subseteq \mathsf{M}(\neg\varphi)$. Hledané číslo je tedy rovno počtu tříd modelů $\mathsf{K} \subseteq {}^{\mathbb{P}}2$ takových, že $\mathsf{M}(T) \subseteq \mathsf{K}$; těch je právě tolik, kolik je podmnožin ${}^{\mathbb{P}}2 - \mathsf{M}(T)$, tj. je jich $2^{2^l - |\mathsf{M}(T)|}$.

B) Buď navíc χ nějaký výrok. Právě kolik je neekvivalentních výroků φ takových, že

$$T \vdash \neg(\chi \mathbin{\&} \varphi)?$$

Odpověď: $2^{2^l - |\mathsf{M}(T \cup \{\chi\})|}$

Uveďte zdůvodnění.

Je $T \vdash \neg(\chi \mathbin{\&} \varphi) \Leftrightarrow T, \chi \vdash \neg\varphi$. Jde tedy o počet neekvivalentních výroků vyvratitelných v $T \cup \{\chi\}$ a takových je právě $2^{2^l - |\mathsf{M}(T \cup \{\chi\})|}$.

A) Buď L jazyk $\langle + \rangle$, kde $+$ je binární funkční symbol. Nechť T je L-teorie s axiomatikou

$$\{x + y = y + x\} \ \cup \ \text{„existuje nekonečně prvků“}$$

a φ je formule

$$(\forall z)(\exists x, y)(z = x + y).$$

Která z následujících tvrzení platí?

a) Pro $k \in \mathbb{N}$ je $\mathbb{N} - \{k\}$ univerzum podstruktury struktury $\langle \mathbb{N}, + \rangle$, právě když je $k = 0$. ($+$ je zde obvyklé sčítání přirozených čísel.)

b) φ je nezávislá sentence teorie T.

c) $T \cup \{\varphi\}$ je ekvivalentní otevřené teorii.

Odpověď: b)

Uveďte zdůvodnění.

a) Máme zjistit, právě kdy je $\mathbb{N} - \{k\}$ uzavřeno na sčítání $+$. To jasně platí, právě když je $k < 2$.

b) $\langle \mathbb{N} - \{0\}, + \rangle \models T \cup \{\neg\varphi\}$, $\langle \mathbb{N}, + \rangle \models T \cup \{\varphi\}$.

c) $\langle \mathbb{N} - \{0\}, + \rangle \subseteq \langle \mathbb{N}, + \rangle \models T \cup \{\varphi\}$, ale $\langle \mathbb{N} - \{0\}, + \rangle$ není model $T \cup \{\varphi\}$. Podstruktura modelu otevřené teorie je však modelem takové teorie, tudíž $T \cup \{\varphi\}$ nemá otevřenou axiomatiku.

B) Je množina $\mathbb{N} - \{0\}$ definovatelná bez parametrů v $\langle \mathbb{N}, + \rangle$ nějakou otevřenou formulí?

Odpověď: Ano

Uveďte zdůvodnění.

Definující formulí je $\varphi(x)$ tvaru $\neg(x + x = x)$.

ÚLOHA 3 [PL]

Buď T teorie vektorových prostorů nad tělesem $\mathbb{R}$ reálných čísel. Pro $0 < n \in \mathbb{N}$ značí $\underline{\mathbb{R}}^n$ vektorový prostor n-tic reálných čísel; má dimenzi n a je modelem T.

A) Která z následujících tvrzení platí?

a) $\underline{\mathbb{R}}^n \equiv \underline{\mathbb{R}}^m$ (elementární ekvivalence) pro $0 < n < m \in \mathbb{N}$.

b) T nemá algebraický prvomodel.

c) Teorie T má model libovolné velikosti alespoň kontinua (= velikost $|\mathbb{R}|$).

d) $\underline{\mathbb{R}}^n \cong \underline{\mathbb{R}}^m$ (tj. $\underline{\mathbb{R}}^n, \underline{\mathbb{R}}^m$ jsou izomorfní) pro $0 < n < m \in \mathbb{N}$.

Odpověď: a), c)

Uveďte zdůvodnění.

a) Struktury jsou modely teorie T, která je kompletní; tudíž jsou elementárně ekvivalentní.

b) $\underline{\mathbb{R}}^1$ je algebraický prvomodel T. Buď totiž $\mathcal{A} \models T$, $e' \in A$ nenulové, $e \in \mathbb{R}^1$ nenulové. Pak $e \mapsto e'$ se jednoznačně rozšíří pomocí lineárních kombinací na vnoření $\underline{\mathbb{R}}^1$ do $\mathcal{A}$ (na jednodimenzionální podprostor prostoru $\mathcal{A}$).

c) Z věty o kompaktnosti plyne, že teorie S, která má nekonečný model, má model libovolné velikosti $\geq |L(S)|$. Uvažovaná teorie T má nekonečný model, $|L(T)|$ je kontinuum, tedy má T model libovolné velikosti alespoň kontinua.

d) Prostory $\underline{\mathbb{R}}^n, \underline{\mathbb{R}}^m$ pro $0 < n < m \in \mathbb{N}$ jsou různé dimenze, tedy nejsou izomorfní.

B) Právě kolik je podmnožin množiny $\mathbb{R}^4$, definovaných bez parametrů ve struktuře $\underline{\mathbb{R}}^4$?

Odpověď: 4

Uveďte zdůvodnění.

Je $\underline{\mathbb{R}}^4 \models T$ a T má eliminaci kvantifikátorů. Stačí najít $\varphi(x)(\underline{\mathbb{R}}^4)$, kde $\varphi(x)$ jsou atomické formule; hledané množiny se získají z těchto pomocí $\cup$ a komplementu do $\mathbb{R}^4$. Atomická formule $\varphi(x)$ je až na ekvivalenci v T některá z formulí $rx = 0$ s $r \in \mathbb{R}$, $0 = 0$, $x = x$; ty definují množiny $\mathbb{R}^4$, $\{0\}$, $\emptyset$. Hledané množiny jsou tedy právě 4 množiny $\emptyset$, $\mathbb{R}^4$, $\{0\}$, $\mathbb{R}^4 - \{0\}$.