

Datum:

Jméno:

Písemná část zkoušky z VPL.

Počet úloh: 3.

Pokyny pro vypracování.

Odpověď Ano/Ne nebo relevantní hodnotu či výraz v nejjednodušším tvaru uveďte do rámečku pro **Odpověď**. Jde-li o výběr ze seznamu a), b), c), ..., uveďte tam všechny správné možnosti (a tedy nekroužkujte). Je-li požadováno **zdůvodnění**, uveďte je do příslušného rámečku; v případě výběru ze seznamu a), b), c), ... zdůvodněte též nevybrání položek.

Zdůvodnění se provádí odkazem na relevantní poučky a všeobecná fakta a správnou logickou argumentací. Musí být dále dostatečně podrobné; např. argument „plyne to z věty o kompaktnosti“ bez dalšího může být principiálně správný, avšak nikoli dostatečně podrobný. Vypracování je třeba psát čitelně a přehledně.

Hodnocení.

Úloha je rozřešena správně, jsou-li všechny její části zodpovězeny správně včetně požadovaných zdůvodnění; jinak je rozřešena nesprávně. Písemná zkouška je absolvována úspěšně resp. dostatečně, jsou-li rozřešeny správně 3 resp. 2 úlohy; jinak je absolvována nedostatečně. Částečné řešení (plně) správně nerozřešené úlohy může pozitivně ovlivnit úspěšnost absolvování písemné zkoušky.

Konvence a značení.

Označení symbolů různými písmeny či znaky znamená, že jde o různé symboly, není-li výslovně uvedeno jinak. (Např. „ x, y jsou proměnné“ značí, že x, y jsou různé proměnné.)

V úlohách z predikátové logiky jsou všechny jazyky a teorie v logice s rovností, není-li výslovně uvedeno jinak.

ÚLOHA 1 [VL]

Buď \mathbb{P} množina všech prvovýroků, $X \subseteq \mathbb{P}$.

$$\mathbf{K} = \{v \in {}^{\mathbb{P}}2; v(p) = 1 \text{ pro každé } p \in X\}.$$

A) Je \mathbf{K} axiomatizovatelná množina modelů?

Odpověď:

Ano

Uvedte zdůvodnění.

\mathbf{K} axiomatizuje teorie X : $\mathbf{K} = \mathbf{M}(X)$.

B) Buď navíc \mathbb{P} nekonečné. Právě kdy je $-\mathbf{K}$ ($= {}^{\mathbb{P}}2 - \mathbf{K}$) axiomatizovatelná množina modelů?

Odpověď:

Právě když je X konečné.

Uvedte zdůvodnění.

Protože je \mathbf{K} axiomatizovatelná, je $-\mathbf{K}$ axiomatizovatelná právě když je $-\mathbf{K}$ i \mathbf{K} axiomatizovatelná, tj. právě když je \mathbf{K} konečně axiomatizovatelná, jak plyne z věty o kompaktnosti. To pak právě znamená, že $\mathbf{M}(X) = \mathbf{K} = \mathbf{M}(X')$ pro jistou konečnou množinu $X' \subseteq X$; to platí právě když $X = X'$, tj. právě když je X konečné.

ÚLOHA 2

 [PL]

- A) Buď L jazyk $\langle \leq \rangle$, kde \leq je binární relační symbol a T buď L -teorie s axiomatikou $\{x \leq x\}$. Která z následujících tvrzení platí?
- $T \vdash x \leq y \ \& \ y \leq x \rightarrow x = y$.
 - Existuje otevřená L -formule ψ tak, že $T \cup \{\psi\}$ je kompletní teorie s alespoň dvouprvkovým modelem.
 - Existuje L -formule ψ tak, že $T \cup \{\psi\}$ je kompletní teorie s alespoň dvouprvkovým modelem.

Odpověď:

c)

Uvedte zdůvodnění.

- Např. $\langle A, A^2 \rangle$ s $|A| > 1$ je model T , ve kterém neplatí uvažovaná formule a není tedy dokazatelná v T .
- Sporem: nechť ψ existuje a \mathcal{A} je alespoň dvouprvkový model $T \cup \{\psi\}$. Pak podstruktura $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ s $B \neq A$ je model $T \cup \{\psi\}$, není však $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ a tedy není $T \cup \{\psi\}$ kompletní.
- Je to např. $(x \leq y \rightarrow x = y) \ \& \text{ „existují právě dva prvky“}$.

- B) Kolik je podmnožin reálného intervalu $(-1, 1)$, definovatelných bez parametrů ve struktuře $\langle (-1, 1), \leq \rangle$?

Odpověď:

2

Uvedte zdůvodnění.

Jde o množiny tvaru

$$\varphi(x)(\langle (-1, 1), \leq \rangle) = \{a \in (-1, 1); \langle (-1, 1), \leq \rangle \models \varphi[a]\}.$$

Struktura $\langle (-1, 1), \leq \rangle$ je model teorie DeLO, která má eliminaci kvantifikátorů, tedy můžeme předpokládat, že φ je otevřená formule. Atomické formule $\varphi(x)$ definují právě množinu $(-1, 1)$, ostatní se získají z ní pomocí \cup , \cap a komplementu – do $(-1, 1)$. Tudíž jsou to právě dvě množiny $(-1, 1), \emptyset$.

ÚLOHA 3 [PL]

- SC0 je teorie v jazyce $L(SC0) = \langle S, 0 \rangle$ s axiomy:
 $0 \neq Sx$, $Sx = Sy \rightarrow x = y$, $x \neq 0 \rightarrow (\exists y)(Sy = x)$, $x \neq S^n x$, kde $n > 0$ je přirozené.
- P je Peanova aritmetika.
- $\mathcal{A}|L$ značí redukt struktury \mathcal{A} na jazyk L , \equiv značí elementární ekvivalenci.

- A) Která z následujících tvrzení platí?
- Je-li $\mathcal{A} \models P$, tak $\mathcal{A}|L(SC0) \equiv \langle \mathbb{N}, S, 0 \rangle$.
 - Je-li $\mathcal{A} \models P$, tak $\text{Th}(\mathcal{A})$ je ekvivalentní P.
 - $\text{Th}(\langle \mathbb{N}, S, 0 \rangle)$ je ekvivalentní SC0.
 - SC0 je ekvivalentní otevřené teorii.

Odpověď:

a), c)

Uveďte zdůvodnění.

- a) Obě struktury jsou modely teorie SC0, která je kompletní; tedy \equiv platí.
b) $\text{Th}(\mathcal{A})$ je kompletní. P však není, což plyne z věty o nerozhodnutelnosti.
c) Teorie SC0 je kompletní, $\langle \mathbb{N}, S, 0 \rangle$ je model SC0, tedy dokazovaná ekvivalence platí.
d) Teorie SC0 má model složený z $\langle \mathbb{N}, 0, S \rangle$ a izomorfní kopie $\langle Z, S \rangle$ struktury $\langle \mathbb{Z}, S \rangle$ (kde S je přičítání jedničky). Pak podstruktura generovaná prvkem $a \in Z$ není model SC0, neboť $a = Sb$ neplatí pro žádné b . Tudíž SC0 není ekvivalentní otevřené teorii, neboť podstruktura otevřeně axiomatizovatelné teorie je model takové teorie.

- B) Kolik je právě neizomorfních spočetných modelů teorie SC0, tj. kolik je $I(\omega, SC0)$?

Odpověď: ω **Uveďte zdůvodnění.**

Pro spočetný model $\mathcal{A} = \langle A, S \rangle$ buď $a \sim_A b \Leftrightarrow S^n(a) = b$ nebo $a = S^n(b)$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$; \sim_A je ekvivalence na A . Je-li \mathcal{B} spočetný model SC0, platí: $\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \Leftrightarrow |A/\sim_A| = |B/\sim_B|$. Pro každé $\kappa \leq \omega$ existuje spočetný model $\mathcal{B} \models SC0$ s $|B/\sim_B| = \kappa$; tedy $I(\omega, SC0) = \omega$.