

Datum:

Jméno:

Písemná část zkoušky z VPL.

Počet úloh: 3.

Pokyny pro vypracování.

Odpověď Ano/Ne nebo relevantní hodnotu či výraz v nejjednodušším tvaru uveďte do rámečku pro **Odpověď**. Jde-li o výběr ze seznamu a), b), c), ..., uveďte tam všechny správné možnosti (a tedy nekroužkujte). Je-li požadováno **zdůvodnění**, uveďte je do příslušného rámečku; v případě výběru ze seznamu a), b), c), ... zdůvodněte též nevybrání položek.

Zdůvodnění se provádí odkazem na relevantní poučky a všeobecná fakta a správnou logickou argumentací. Musí být dále dostatečně podrobné; např. argument „plyne to z věty o kompaktnosti“ bez dalšího může být principiálně správný, avšak nikoli dostatečně podrobný. Vypracování je třeba psát čitelně a přehledně.

Hodnocení.

Úloha je rozřešena správně, jsou-li všechny její části zodpovězeny správně včetně požadovaných zdůvodnění; jinak je rozřešena nesprávně. Písemná zkouška je absolvována úspěšně resp. dostatečně, jsou-li rozřešeny správně 3 resp. 2 úlohy; jinak je absolvována nedostatečně. Částečné řešení (plně) správně nerozřešené úlohy může pozitivně ovlivnit úspěšnost absolvování písemné zkoušky.

Konvence a značení.

Označení symbolů různými písmeny či znaky znamená, že jde o různé symboly, není-li výslovně uvedeno jinak. (Např. „ x, y jsou proměnné“ značí, že x, y jsou různé proměnné.)

V úlohách z predikátové logiky jsou všechny jazyky a teorie v logice s rovností, není-li výslovně uvedeno jinak.

ÚLOHA 1 [VL]

Buď $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$ množina všech prvovýroků.

- A) Necht T je \mathbb{P} -teorie s axiomatikou $\neg p \rightarrow q, \neg q \ \& \ p$.
Kolik má T dokazatelných výroků, ztotožníme-li logicky ekvivalentní?

Odpověď:

64

Uveďte zdůvodnění.

$m = |\mathbf{M}(T)| = 2$. ($\mathbf{M}(T) = \{\langle 1, 0, 0 \rangle, \langle 1, 0, 1 \rangle\}$.) V T dokazatelných výroků je $2^{2^3 - m} = 2^6 = 64$.

- B) Kolik je neekvivalentních \mathbb{P} -teorií S takových, že S má právě 2 kompletní neekvivalentní extenze v \mathbb{P} ?

Odpověď:

28

Uveďte zdůvodnění.

Jde o \mathbb{P} -teorie S s právě dvěma modely; těch je právě $\binom{2^3}{2} = 28$.

ÚLOHA 2 [PL]

Buď L jazyk $\langle 0, < \rangle$ s konstantním resp. binárním relačním symbolem 0 resp. $<$, φ buď L -formule

$$x < 0 \rightarrow x < y.$$

A) Je φ dokazatelná?

Odpověď:

Ne

Uveďte zdůvodnění.

$\langle \mathbb{R}, 0, < \rangle \not\models \varphi[-1, -2]$, tedy $\langle \mathbb{R}, 0, < \rangle \not\models \varphi$ a φ není pravdivá; tedy φ není dokazatelná.

B) Která z následujících tvrzení platí?

- a) Existuje dokazatelná instance formule φ .
- b) Instance $\varphi(y/z)$ je ekvivalentní s φ , jakmile z je proměnná.

Odpověď:

a)

Uveďte zdůvodnění.

- a) Dokazatelná je instance $\varphi(y/0)$, tj. $x < 0 \rightarrow x < 0$; je to tautologie.
- b) $\langle \mathbb{R}, 0, \leq \rangle \not\models ((x < 0 \rightarrow x < y) \rightarrow (x < 0 \rightarrow x < z))[0, 1, -1]$, tudíž $\not\models \varphi \rightarrow \varphi(y/z)$.

C) Určete množinu $\varphi(x, y)(\langle \mathbb{N}, 0, < \rangle)$, tj. množinu $\{ \langle a, b \rangle \in \mathbb{N}^2; \langle \mathbb{N}, 0, < \rangle \models \varphi[a, b] \}$.

Odpověď:

\mathbb{N}^2

Uveďte zdůvodnění.

Jde o $(\neg(x < 0) \vee (x < y))(\langle \mathbb{N}, 0, < \rangle)$, což je jasně \mathbb{N}^2 .

ÚLOHA 3

 [PL]

- A) Které z následujících teorií jsou kompletní?
- Peanova aritmetika.
 - Extenze teorie DeLO hustého lineárního uspořádání bez konců o axiom $c \leq d \ \& \ c \neq d$,
kde c, d jsou konstantní symboly přidané k jazyku $\langle \leq \rangle$.
 - Extenze čisté rovnosti PE o axiom „existuje alespoň n prvků“, kde $1 < n \in \mathbb{N}$ je pevné.
 - Teorie nekonečných vektorových prostorů nad tělesem F .

Odpověď:

b), d)

Uveďte zdůvodnění.

- Plyne z věty o nerozhodnutelnosti: bezesporná extenze Robinsonovy aritmetiky Q je nerozhodnutelná a je-li rekurzivně axiomatizovaná, je nekompletní.
- Uvažovaná teorie je jasně ω -kategorická a protože nemá konečné modely a je ve spočetném jazyce, je kompletní.
- „Existuje právě n prvků“ je nerozhodnutelná sentence uvažované teorie.
- Uvažovaná teorie T je v jazyce kardinality $\omega + |F|$ a λ -kategorická pro každý nespočetný kardinál $\lambda > \omega + |F|$. Protože nemá konečné modely, plyne odtud, že T je kompletní. λ -kategoričnost plyne z toho, že vektorové prostory nad F a velikosti $\lambda > |F|$ mají báze stejné velikosti.

- B) Je teorie DiLO diskrétního lineárního uspořádání ekvivalentní otevřené teorii?

Odpověď:

Ne

Uveďte zdůvodnění.

Je $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle \subseteq \langle \mathbb{Z}, \leq \rangle \models \text{DiLO}$, ale $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle \not\models \text{DiLO}$. Protože podstruktura modelu otevřené teorie S je modelem S , není DiLO ekvivalentní otevřené teorii.