Datum: 18.1.12 Jméno:

Písemná část zkoušky z VPL.

Počet úloh: 3.

Pokyny pro vypracování.

Odpověď A(no)/N(e) nebo relevantní hodnotu či výraz v nejjednodušším tvaru uveďte do rámečku pro **Odpověď**. Zdůvodnění každé položky odpovědi uveďte do rámečku **Zdůvodnění**.

Zdůvodnění se provádí odkazem na relevantní poučky a všeobecná fakta a správnou logickou argumentací. Musí být dále dostatečně podrobné; např. argument „plyne to z věty o kompaktnosti“ bez dalšího může být principiálně správný, avšak nikoli dostatečně podrobný. Vypracování je třeba psát čitelně a přehledně.

Hodnocení.

Úloha je rozřešena správně, se ziskem 2 body, jsou-li všechny její části zodpovězeny správně včetně požadovaných zdůvodnění; jinak je rozřešena nesprávně. Písemná zkouška je absolvována úspěšně resp. dostatečně, jsou-li rozřešeny správně 3 (6 b.) resp. 2 úlohy (4b.); jinak je absolvována nedostatečně. Částečné řešení (plně) správně nerozřešené úlohy může znamenat zisk zlomků bodů a pozitivně ovlivnit úspěšnost absolvování písemné zkoušky.

Konvence a značení.

Označení symbolů různými písmeny či znaky znamená, že jde o různé symboly, není-li výslovně uvedeno jinak. (Např. „x, y jsou proměnné“ značí, že x, y jsou různé proměnné.)

Ohodnocení v prvovýroků $\{p_0, \ldots, p_{l-1}\}$ se značí také jako l-tice $\langle v(0), \ldots, v(l-1)\rangle$.

V úlohách z predikátové logiky jsou všechny jazyky a teorie v logice s rovností, není-li výslovně uvedeno jinak.

ÚLOHA 1 [VL]

A) Buď $\mathbb{P}$ konečná 7-prvková množina všech prvovýroků a nechť T je 4-prvková podmnožina množiny $\{\neg p;\ p \in \mathbb{P}\}$. Kolik je neekvivalentních $\mathbb{P}$-výroků, vyvratitelných v teorii T?

Odpověď.

2^{120}

Zdůvodnění.

Buď $l = |\mathbb{P}|$, $n = |T|$. Počet neekvivalentních $\mathbb{P}$-výroků vyvratitelných v T je $2^{2^l - |\mathsf{M}(T)|}$. Přitom $|\mathsf{M}(T)| = 2^{l-n}$, neboť $v \in {}^{\mathbb{P}}2$ je model $T \Leftrightarrow v(p) = 0$ pro $\neg p \in T$; takových v je evidentně právě 2^{l-n}. Hledané číslo je $2^{2^l - 2^{l-n}}$, po dosazení $2^{2^7 - 2^{7-4}} = 2^{120}$.

B) Buď $\mathbb{P} = \{p_0, p_1\}$ dvouprvková množina všech prvovýroků a T buď $\mathbb{P}$-teorie s $\mathsf{M}(T) = \{\langle 0, 1\rangle, \langle 1, 0\rangle\}$. Najděte $\mathbb{P}$-formuli φ v CNF takovou, že teorie T je ekvivalentní s teorií $\{\varphi\}$.

Odpověď.

$(p_0 \vee p_1)\ \&\ (\neg p_0 \vee \neg p_1)$

Zdůvodnění.

φ je obecně tvaru $\bigwedge_{v \in -\mathsf{M}(T)} \bigvee_{p \in \mathbb{P}} \neg p^{v(p)}$. $-\mathsf{M}(T)$ je zde $\{\langle 0, 0\rangle, \langle 1, 1\rangle\}$.

ÚLOHA 2 [PL] Buď L jazyk $\langle \leq \rangle$, kde $\leq$ je binární relační, a nechť T je L-teorie, která je extenzí teorie nekonečného lineárního uspořádání o axiom $(\exists x)(\forall y)(x \leq y)$.

A) Která z následujících tvrzení platí? (A/N)

a) Teorie T je kompletní.
b) Existuje sentence φ tak, že $T \cup \{\varphi\}$ je jednoduchá kompletní extenze teorie T.
c) Teorie T je ekvivalentní otevřené teorii.

Odpověď.

a) N
b) A
c) N

Zdůvodnění.

a) Existuje model T, který nemá a také model který má největší prvek; tyto modely svědčí o nekompletnosti T.
b) Stačí vzít za φ „axiom hustoty uspořádání“ & „existuje největší prvek“; pak $T \cup \{\varphi\}$ je ω-kategorická teorie a tedy kompletní.
c) Konečná podstruktura modelu teorie T není model T, tedy T nemůže být modelem otevřené teorie.

B) Buď $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \subseteq \langle \mathbb{R}, \leq \rangle$, kde $\leq$ je obvyklé uspořádání reálných čísel a

$$A = [0, 2], \quad B = [1, 2] \quad \text{jsou uzavřené intervaly reálných čísel.}$$

Která z následujících tvrzení platí? (A/N)

a) $\mathcal{B}$ je elementární podstruktura $\mathcal{A}$.
b) T nemá eliminaci kvantifikátorů.

Odpověď.

a) N
b) A

Zdůvodnění.

a) Formule „x je nejmenší prvek“ platí v $\mathcal{B}$ o 1, nikoli však v $\mathcal{A}$ o 1.
b) Protože T není modelově kompletní dle a) ($\mathcal{A}, \mathcal{B}$ jsou modely T), nemá T eliminaci kvantifikátorů.

ÚLOHA 3 [PL] Buď L jazyk s rovností bez mimologických symbolů a T buď L-teorie bez mimologických axiomů.

A) Která z následujících tvrzení platí? (A/N)

a) T je kompletní.
b) T je rozhodnutelná.
c) L-teorie S s axiomy „existuje nekonečně prvků" je modelově kompletní.
d) Každá jednoduchá kompletní extenze teorie T je ekvivalentní otevřené teorii.

Odpověď.

a) N
b) A
c) A
d) N

Zdůvodnění.

a) T není kompletní, protože má konečné i nekonečné modely.
b) T má rekurzivní kompletaci. Je totiž právě spočetně neekvivalentních jednoduchých kompletních extenzí teorie T. Jsou to právě extenze o axiom „existuje právě n prvků" s $0 < n \in \mathbb{N}$, a ještě extenze o schema „existuje nekonečně prvků"; jasně je lze prezentovat jako rekurzivní kompletaci.
c) Zřejmě lze každé neprázdné konečné parciální vnoření mezi dvěma modely teorie S bezprostředně prodloužit. Tedy S je f-homogenní, tudíž má S eliminaci kvantifikátorů a tedy je modelově kompletní.
d) Jednoduchá kompletní extenze T' teorie T o schema „existuje nekonečně prvků" není ekvivalentní otevřené teorii, neboť konečná podstruktura jejího modelu není jejím modelem.

B) Právě kolik je podmnožin množiny $\mathbb{Z}$, které jsou definovatelné bez parametrů v L-struktuře $\langle \mathbb{Z} \rangle$?

Odpověď.

2

Zdůvodnění.

Struktura $\langle \mathbb{Z} \rangle$ je model L-teorie s axiomatikou „existuje nekonečně prvků" a tato teorie má eliminaci kvantifikátorů. Definující formuli $\varphi(x)$ lze napsat pomocí atomických formulí a spojek $\neg, \&$. Stačí tedy najít $\varphi(x)(\langle \mathbb{Z} \rangle)$, kde $\varphi(x)$ jsou atomické formule; hledané množiny se získají z těchto pomocí komplementu do $\mathbb{Z}$ a $\cap$. Atomické formule $\varphi(x)$ jsou $x = x$; ty definují množinu $\mathbb{Z}$. Hledané množiny jsou tedy právě 2 množiny $\mathbb{Z}$, $\emptyset$.

Jiné řešení. Buď $X \subseteq \mathbb{Z}$ definovaná bez parametrů v $\langle \mathbb{Z} \rangle$; pak $h[X] = X$ pro každý automorfizmus $\langle \mathbb{Z} \rangle$. Pro $a, b \in \mathbb{Z}$ existuje automorfizmus h struktury $\langle \mathbb{Z} \rangle$ s $h(a) = b$. Tudíž neexistuje $a \in X$, $b \in \mathbb{Z} - X$ a hledané množiny jsou právě dvě, totiž $\mathbb{Z}$ a $\emptyset$.