

Jak na...

Jan Šebetovský, Marek Novotný, Tomáš Herceg

22. února 2011

Obsah

Úvod	4
1 Jak na limity a derivace	5
1.1 Limity	5
1.2 Derivace	5
1.3 Užitečné vzorce	5
2 Jak na řady	6
2.1 Základní postup řešení řad	6
2.2 Pravidla úprav	6
2.3 Kritéria pro nezáporné členy	6
2.4 Kritéria pro neabsolutní konvergenci	7
3 Jak na integrály	8
3.1 Per partes	8
3.2 Substituce	8
3.3 Racionální lomené funkce	9
3.4 Racionální lomené funkce s dalšími funkcemi	9
3.5 Užití integrálů	11
3.6 Známé primitivní funkce	11
4 Jak na stejnom. konv. posloupností a řad, mocninné řady a Fourierovy řady	12
4.1 Stejnoměrná konvergence	12
4.2 Stejnoměrná konvergence řad funkcí	13
4.3 Mocninné řady	14
4.4 Fourierovy řady	15
5 Jak na totální diferenciál, implicitní funkce a vázané extrém	16
5.1 Totální diferenciál	16
5.2 Implicitní funkce	18
5.3 Vázané extrém	20
6 Jak na Fubiniho a diferenciální rovnice	22
6.1 Fubiniho věta – počítání obsahů nebo integrálů na intervalech	22
6.2 Fubiniho věta – počítání integrálů	22
6.3 Diferenciální rovnice prvního řádu	23
6.4 Lineární rovnice n -tého řádu s konstantními koeficienty	26
7 Jak na pravděpodobnost	29
7.1 Variace, kombinace	29
7.2 Charakteristiky	29
7.3 Vztahy	29
7.4 Nezávislost	29
7.5 Diskrétní rozdělení	30
7.6 Spojitá rozdělení	31
7.7 Bayesova věta	31
7.8 Čebyševova nerovnost	31
7.9 Centrální limitní věta	31

8	Jak na výrokovou logiku	32
8.1	Schémata axiomů	32
8.2	Odvozovací pravidla	32
8.3	Věty o logice	32
8.4	Věty v logice	32
9	Jak na indexaci dokumentů a kompresi	33
9.1	Indexace dokumentů	33
9.2	Kompresa	33

Úvod

Tento dokument je sborníkem návodů, postupů a souhrnů, které autoři vytvořili a použili při studiu na MFF UK. Dokument byl vytvořen s cílem poskytnout tyto materiály i následujícím generacím. Celý dokument včetně jeho zdrojových kódů je poskytován pod licencí CC BY-NC-SA Česko 3.0 (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/cz/>) a je (samozřejmě) poskytován bez záruky správnosti. Veškeré návody v tomto dokumentu předpokládají větší či menší znalosti problematiky a tak je nelze použít místo běžných studijních materiálů, ale jako jejich doplněk. Typicky je vhodné do tohoto dokumentu nahlížet při studiu a při opakování (případně i při písemce, je-li to dovoleno).

Chcete se přidat?

Chcete-li do dokumentu přidat nějaký svůj materiál nebo upravit/opravit ten stávající, klidně můžete. Stačí postupovat podle následujícího návodu.

- 1) Najděte zdrojové kódy dokumentu. (První verze tohoto dokumentu je umístěna na fóru <http://forum.matfyz.info/>. Pokud se umístění změní, najdete tam o tom informaci.)
- 2) Upravte/rozšiřte je. Případné opravy (zdanlivých) chyb, prosím, s někým konzultujte, ať se zbytečně nezanášejí chyby nové.
- 3) Nechcete-li se vzdát autorských práv, uveďte se (nejste-li tam již) na konec seznamu autorů na titulní straně dokumentu.
- 4) Změňte datum vytvoření dokumentu (creationdate).
- 5) Vygenerujte dokument.
- 6) Uložte nový dokument i zdrojové kódy na místo k tomu určené.

Něco z historie

Tvorba tohoto dokumentu začala při učení se na první bonifikační písemku z matematické analýzy, kdy někdo doporučil si vypsát všechny základní limity. Tomáš Herceg se uvolil, že je sepíše na počítači. Výsledný dokument nesl nadpis „Jak na limity“. Později (kvůli dalším bonifikačním písemkám) vznikly dokumenty „Jak na řady“, „Jak na integrály“, „Jak na stejnoměrnou konvergenci“, „Jak na totální diferenciál“ a „Jak na Fubiniho a diferenciální rovnice“. Tím vznikla matematicko-analytická řada „Jak na...“. Následně i další materiály byly označovány pojmem „Jak na...“ a tak se řada rozšířila na další předměty. Poté došlo k jejich přepsání a sloučení dohromady. Přepsání bylo nutné, protože tehdejších devět dokumentů bylo v pěti různých formátech. A tak vznikl tento dokument, který snad poslouží i Vám.

Méně zjevné konvence

- Téměř v celém dokumentu jsou používány čtyři druhy seznamů. Výjimkou je např. Abel-Dirichlet a výroková logika.
 - Z obou stran uzávorkované římské číslice se používají pro tvrzení, která musí platit zároveň.
 - Z obou stran uzávorkovaná malá písmena latinky se používají na seznamy, ze kterých stačí, aby platilo jen jedno tvrzení.
 - Z obou stran uzávorkovaná velká písmena latinky se používají na seznamy ekvivalentních věcí.
 - Seznam s arabskými číslicemi a písmeny latinky se závorkou jen z jedné strany se používá pro seznamy, které určují postup práce.

1 Jak na limity a derivace

1.1 Limity

1.1.1 Exponenciála

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \text{Funkce } e^x \text{ se v bodě } 0 \text{ chová jako funkce } x + 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \quad n \in \mathbb{N}$$

1.1.2 Logaritmus

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \quad \text{Funkce } \ln x \text{ se v bodě } 1 \text{ chová jako funkce } x \text{ v bodě } 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{\ln x} = \infty \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0 \quad n \in \mathbb{N}$$

1.1.3 Goniometrické funkce

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

Funkce $\arcsin x$ se v bodě 0 chová jako funkce x .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

Funkce $\arctan x$ se v bodě 0 chová jako funkce x .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Funkce $\sin x$ se v bodě 0 chová jako funkce x .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

1.2 Derivace

$$C' = 0$$

$$C \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$x \in \mathbb{R}$$

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$$

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$x \in \mathbb{R}, a \in (0, \infty)$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$x \in (0, \infty), a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$$

1.3 Užitečné vzorce

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$a^x = e^{x \ln a}$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

$$\sin a + \sin b = 2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\cos a - \cos b = -2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

2 Jak na řady

2.1 Základní postup řešení řad

- 1) Pokud neplatí $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, řada D.
- 2)
 - a) Pokud $\sum |a_n|$ K, pak K také $\sum a_n$.
 - b) Pokud jsou v a_n věci jako $n!$, použít D'Alambertovo podílové kritérium.
 - c) Pokud jsou v a_n věci jako 2^n , použít Cauchyho odmocninné kritérium.
- 3) Pokud se řada chová jako $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ pro nějaké α , použít srovnávací kritérium.
- 4) Střída-li řada znaménko, pak použít
 - a) Leibnitzovo kritérium, pokud suma vypadá jako $\sum (-1)^n a_n$.
 - b) Dirichletovo kritérium, pokud suma vypadá jako $\sum \sin n \cdot \text{něco}$ nebo $\sum \cos n \cdot \text{něco}$.
- 5) Přemýšlet!

2.2 Pravidla úprav

$$\begin{aligned}\sum a_n K &\implies \sum \alpha \cdot a_n K; \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \sum a_n K, \sum b_n K &\implies \sum (a_n + b_n) K\end{aligned}$$

2.3 Kritéria pro nezáporné členy

2.3.1 Srovnávací kritérium

Nechť $\exists n_0 \forall n \geq n_0 : a_n \leq b_n$ pak

$$\begin{aligned}\sum b_n K &\implies \sum a_n K \\ \sum a_n D &\implies \sum b_n D\end{aligned}$$

2.3.2 Limitní srovnávací kritérium

Pro $\frac{\lim a_n}{\lim b_n} = A \in \mathbb{R}^*$ platí

$$\begin{aligned}A \in (0, \infty), & \text{ pak } \sum a_n K \iff \sum b_n K \\ A = 0, & \text{ pak } \sum b_n K \implies \sum a_n K; \sum a_n D \implies \sum b_n D \\ A = \infty, & \text{ pak } \sum a_n K \implies \sum b_n K; \sum b_n D \implies \sum a_n D\end{aligned}$$

2.3.3 Cauchyho odmocninové kritérium

$$\begin{aligned}\exists q \in (0, 1) \exists n \geq n_0 : \sqrt[n]{a_n} < q &\implies \sum a_n K \\ \limsup \sqrt[n]{a_n} < 1 &\implies \sum a_n K \\ \lim \sqrt[n]{a_n} < 1 &\implies \sum a_n K \\ \limsup \sqrt[n]{a_n} > 1 &\implies \sum a_n D \\ \lim \sqrt[n]{a_n} > 1 &\implies \sum a_n D\end{aligned}$$

2.3.4 D'Alambertovo podílové kritérium

Nechť $a_n > 0$, pak platí

$$\exists q \in (0, 1) \exists n \geq n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} < q \implies \sum a_n \text{ K}$$

$$\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \sum a_n \text{ K}$$

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \sum a_n \text{ K}$$

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies \sum a_n \text{ D}$$

2.3.5 Kondenzační kritérium

Nechť $a_n \rightarrow 0$ a a_n je klesající, pak platí

$$\sum a_n \text{ K} \iff \sum 2^n \cdot a_{2^n} \text{ K}$$

2.3.6 Raabeovo kritérium

Nechť $a_n > 0$, pak platí

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) > 1 \implies \sum a_n \text{ K}$$

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) < 1 \implies \sum a_n \text{ D}$$

2.3.7 Bertrandovo kritérium

Pro $B_n = \ln n \left[n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right]$ platí

$$B_n > 1 \implies \sum a_n \text{ K}$$

$$B_n < 1 \implies \sum a_n \text{ D}$$

2.4 Kritéria pro neabsolutní konvergenci

2.4.1 Abel-Dirichletovo kritérium

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $\{b_n\}$ je nerostoucí omezená posloupnost reálných čísel. Je-li splněna alespoň jedna z následujících podmínek, je řada $\sum a_n b_n$ konvergentní.

A) $\sum a_n \text{ K}$

D) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ a a_n má omezené částečné součty, tedy $\exists K > 0 \forall n \in \mathbb{N} : |a_1 + \dots + a_n| \leq K$

2.4.2 Leibnitzovo kritérium

Nechť $c_n \rightarrow 0$ je klesající, pak $\sum (-1)^n \cdot c_n \text{ K}$.

3 Jak na integrály

3.1 Per partes

$$\int u'v = uv - \int uv'$$

3.2 Substitute

3.2.1 1. druh

Příklad

$$\begin{aligned}\int xe^{-x^2} dx &=? \\ y &= -x^2 \\ \frac{dy}{dx} &= -2x \\ dy &= -2x dx \\ \int xe^{-x^2} dx &= \int e^y - \frac{1}{2} dy\end{aligned}$$

3.2.2 2. druh

φ musí být prostá a musí svůj definiční obor zobrazit **na** definiční obor integrované funkce.

Příklad

$$\begin{aligned}\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x} &=? \\ y &= \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} && \text{Vybereme součást pro substituci} \\ y^3(1+x) &= 1-x \\ x &= \frac{1-y^3}{1+y^3} = -1 + \frac{2}{1+y^3} && \text{Z rovnice pro } y \text{ vyjádříme } x \\ \frac{dx}{dy} &= 2 \frac{-1}{(1+y^3)^2} 3y^2 && \text{Levou stranu položíme „rovnu“ derivaci } x \\ dx &= 2 \frac{-1}{(1+y^3)^2} 3y^2 dy && \text{Z předchozího vyjádříme } x \\ \int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x} &= \int y \frac{1}{\frac{1-y^3}{1+y^3}} 2 \frac{-1}{(1+y^3)^2} 3y^2 dy && \text{Do původního integrálu dosadíme } y \text{ a dosadíme za podíl } \frac{dx}{x}\end{aligned}$$

3.3 Racionální lomené funkce

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx \quad q(x) \neq 0$$

Příklad

$$I = \int \frac{x^4}{x^3 - 1}$$

1) Stupeň čitatele < stupeň jmenovatele \Rightarrow vydělíme.

$$\frac{x^4}{x^3 - 1} = \frac{x^4 - x}{x^3 - 1} + \frac{x}{x^3 - 1} = x + \frac{x}{x^3 - 1} \Rightarrow I = \frac{x^2}{2} + \int \frac{x}{x^3 - 1}$$

2) Rozložíme jmenovatele na součin.

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

3) Rozložíme funkci na parciální zlomky (činitelé s kořenem v \mathbb{R} budou mít v čitateli jeden parametr, činitelé s kořenem v \mathbb{C} budou mít v čitateli dva parametry, pokud je nějaký činitel v součinu k krát, tak bude i v rozkladu k krát – postupně s mocninami $1, 2, \dots, k$.

$$\frac{x}{x^3 - 1} = \frac{a}{x - 1} + \frac{bx + c}{x^2 + x + 1}$$

4) Vynásobíme rovnost původním jmenovatelem a najdeme čísla a, b, c atd. – nejprve dosazením nulových bodů a potom podle rovnosti koeficientů u jednotlivých mocnin neznámé.

$$x = a(x^2 + x + 1) + (bx + c)(x - 1)$$

$$a = \frac{1}{3} \quad b = -\frac{1}{3} \quad c = \frac{1}{3}$$

$$I = \frac{x^2}{2} + \int \left(\frac{1}{3} \frac{1}{x - 1} + \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}}{x^2 + x + 1} \right)$$

3.4 Racionální lomené funkce s dalšími funkcemi

(a) $\int R(\log x) \frac{dx}{x} \Rightarrow y = \log x$, substituce 1. druhu

(b) $\int R(e^{ax}) dx \Rightarrow y = e^{ax}$, substituce 1. druhu

(c) $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx \Rightarrow y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, substituce 2. druhu

(d) $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)$

((a)) Obsah odmocniny má dva různé reálné kořeny \Rightarrow převedeme na (c).

Příklad

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 4x - 3}} = \int \frac{dx}{(3 - x) \sqrt{\frac{x-1}{3-x}}} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{x-1}{3-x}}$$

$$-x^2 + 4x - 3 = (x - 1)(3 - x)$$

((b)) Obsah odmocniny nemá reálné kořeny

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{ax} + y \quad a > 0$$

Příklad

$$I = \int \frac{1}{1 + \sqrt{x^2 + x - 1}} dx \implies \sqrt{x^2 + x - 1} = x + y$$

$$x^2 + x - 1 = x^2 + 2xy + y^2 \implies x = \frac{y^2 + 1}{1 - 2y}, \text{ substituce 2. druhu}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2y(1 - 2y) + (y^2 + 1)2}{(1 - 2y)^2}$$

$$I = \int \frac{1}{1 + y + \frac{y^2 + 1}{1 - 2y}} \frac{2y(1 - 2y) + (y^2 + 1)2}{(1 - 2y)^2} dy$$

(e) $\int R(\cos x, \sin x) dx$. Možnosti seřazeny podle priorit:

$$((a)) \quad R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x) \implies y = \sin x$$

$$((b)) \quad R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x) \implies y = \cos x$$

$$((c)) \quad R(-\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x) \implies y = \tan x, \text{ substituce 2. druhu}$$

rada:

$$y = \tan x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \implies y^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \implies \cos^2 x = \frac{1}{y^2 + 1}$$

$$x = \arctan y \implies \frac{dx}{dy} = \frac{1}{1 + y^2}$$

$$x = \varphi(y) = \arctan y + k\pi \quad \varphi : \mathbb{R} \text{ na } \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$

((d)) Vždy lze použít $y = \tan \frac{x}{2}$, substituce 2. druhu, ale je to zoufalost

rada:

$$y = \tan \frac{x}{2}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - y^2}{1 + y^2}$$

$$\sin x = \frac{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2y}{1 + y^2}$$

$$x = 2 \arctan y \implies \frac{dx}{dy} = \frac{2}{1 + y^2}$$

$$x = \varphi(y) = 2 \arctan y + 2k\pi \quad \varphi : \mathbb{R} \text{ na } (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi)$$

3.5 Užití integrálů

Délka křivky

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Objem tělesa vzniklého rotováním křivky podle osy x

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Povrch (bez podstav) tělesa vzniklého rotováním křivky podle osy x

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

3.6 Známé primitivní funkce

$f = x^n$	$F = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$f = \frac{1}{x}$	$F = \ln x + c$
$f = \sin x$	$F = -\cos x + c$
$f = \cos x$	$F = \sin x + c$
$f = \frac{1}{\cos^2 x}$	$F = \tan x + c$
$f = \frac{1}{\sin^2 x}$	$F = -\cotan x + c$
$f = e^x$	$F = e^x + c$
$f = a^x$	$F = \frac{a^x}{\ln a} + c$
$f = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$F = \arcsin x + c$
$f = \frac{1}{1+x^2}$	$F = \arctan x + c$

4 Jak na stejnoměrnou konvergenci posloupností a řad, mocninné řady a Fourierovy řady

4.1 Stejnoměrná konvergence

$$f_n, f : J \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} f_n &\rightarrow f \text{ bodově} && \iff \forall x \in J : f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} f(x) \\ f_n &\rightrightarrows f && \iff \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 \forall x \in J : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \\ f_n &\overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f && \iff \forall [c, d] \subset J : f_n \rightrightarrows f \text{ na } [c, d] \end{aligned}$$

Věta $f_n, f : J \rightarrow \mathbb{R}$. Označ $\sigma_n = \sup_{x \in J} |f_n(x) - f(x)|$, pak $f_n \rightrightarrows f \text{ na } J \iff \sigma_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Věta f_n spoj. $f_n \rightrightarrows f \implies f$ spoj. Tedy f_n spoj. na J a f není spoj. na $J \implies f_n \not\overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f \text{ na } J$

4.1.1 Postup řešení

- 1) Najdeme funkci, ke které budou f_n konvergovat (vyzkoušíme klíčové body intervalu). Pokud f_n spoj. a f není spoj. $\implies f_n \not\overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$, tedy vyloučíme problémový bod a řešíme $\overset{\text{loc}}{\rightrightarrows}$.
 - 2) Najít $\sigma_n = \sup_{x \in J} |f_n(x) - f(x)|$
 - ((a)) Odhadneme funkci shora (pokud jde odhad k 0)
 - ((b)) Průběhem funkce najdeme maximum v bodě m (pro n pevné), maximum dosadíme za x , vypočítáme supremum.
 - 3) $f_n \rightrightarrows f \iff \sigma_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, pokud nejde σ_n k 0, pokračujeme bodem 4). Jinak f_n konverguje k f (tedy končíme).
 - 4) Najdeme problémový bod (pravděpodobně lze určit podle toho, k čemu jde m (maximum) pokud $n \rightarrow \infty$). Tento bod pomocí δ nebo K vyloučíme a řešíme znovu od bodu 2) pro nový interval (tedy řešíme lokální stejnoměrnou konvergenci).
 - 5) Po vyřešení lokální konvergence převedeme na stejnoměrnou konvergenci.
- Příklad: $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f \text{ na } [0; 1 - \delta] \implies f_n \rightrightarrows f \text{ na } [0; 1]$.

Souhrn postupu řešení

- 1) Najdeme f . Pokud f_n spoj. a f není spoj. $\implies f_n \not\overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$, přejít na 4.
- 2) Najít σ_n
 - ((a)) Odhadem.
 - ((b)) Průběhem.
- 3) $\sigma_n \overset{?}{\rightarrow} 0$
 - (ano) $f_n \rightrightarrows f$; konec.
 - (ne) Přejdeme na 4).
- 4) Vyloučit problémový bod (δ nebo K), řešit od 2) pro nový interval.
- 5) $\overset{\text{loc}}{\rightrightarrows}$ převést na \rightrightarrows .

4.2 Stejněměrná konvergence řad funkcí

Definice $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \Rightarrow$ na $M \subset \mathbb{R} \iff s_N(x) = \sum_{n=1}^N u_n(x) \Rightarrow$ na M .

Věta (Nutná podmínka) $\sum u_n(x) \Rightarrow$ na $M \implies u_n(x) \Rightarrow 0$ na M .

Věta (Weierstrassovo kritérium)

$$(i) \forall x \in M : |u_n(x)| \leq a_n \in \mathbb{R}$$

$$(ii) \sum a_n < \infty$$

Pak $\sum u_n(x) \Rightarrow$ na M .

Věta (O spojitosti řady funkcí) Necht' $u_n(x) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, u_n$ spoj., pak

$$\sum u_n(x) \xRightarrow{\text{loc}} \text{ na } (a, b) \implies f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ spoj. na } (a, b)$$

Věta (O přehození sumy a derivace) Necht' $\sum u_n(x)$ na (a, b) a $\exists u'_n$ takové, že platí

$$(i) \exists x_0 \sum u_n(x_0) < \infty$$

$$(ii) \sum u'_n(x) \xRightarrow{\text{loc}} \text{ na } (a, b)$$

Pak pro $F(x) = \sum u_n(x)$ platí $F'(x) = \sum u'_n(x)$

Věta (Abel-Dirichlet) Necht' $b_1(x) \geq b_2(x) \geq \dots \geq b_n(x) \geq \dots \geq 0$ a platí jedno z následujících

$$A) \sum a_n \Rightarrow \& b_n(x) \text{ omezená}$$

$$D) b_n \Rightarrow 0 \& a_n(x) \text{ má omezené částečné součty}$$

Pak $\sum a_n(x) \cdot b_n(x) \Rightarrow$.

Řady s omezenými částečnými součty

$$\begin{array}{ll} a_n = (-1)^n & \text{na } \mathbb{R} \\ a_n = \sin nx & \text{na } [\delta; 2\pi - \delta] + 2k\pi \\ a_n = \cos nx & \text{na } [\delta; 2\pi - \delta] + 2k\pi \end{array}$$

Věta (Bolzano-Cauchy) $\sum u_i(x) \Rightarrow \implies \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall m, n \geq n_0 \forall x \in \dots : \left| \sum_{i=n}^m u_i(x) \right| < \epsilon$.

4.2.1 Postup řešení

0) Možná je potřeba zjistit pro jaká x suma konverguje.

$$1) \text{ Najdeme } \sigma_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u_n(x)|$$

$$2) \sigma_n \not\rightarrow 0 \implies u_n \not\Rightarrow 0 \implies \sum u_n \not\Rightarrow$$

$$3) \sigma_n \rightarrow 0 \& \sum \sigma_n < \infty \xRightarrow{\text{Weirst.}} \sum u_n \Rightarrow$$

$$4) \sigma_n \rightarrow 0 \& \sum \sigma_n = \infty \implies ? \quad \text{Zkusit A-D nebo B-C}$$

5) Pro zjištění spojitosti použít větu o spojitosti řady funkcí, pro zjištění derivace použít větu o přehození sumy a derivace.

4.3 Mocninné řady

Definice $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^n$ je mocninná řada. Pro poloměr konvergence R platí:

$$|x-a| < R \implies \sum K$$

$$|x-a| > R \implies \sum D$$

Věta (O hodnotě poloměru konvergence)

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}. \text{ Pokud } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}, \text{ pak } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

Věta (Abel)

Jestliže $\sum a_n x^n$ konverguje pro $x = R$, pak $\sum \Rightarrow$ na $[0; R]$ a tedy $\sum a_n R^n = \lim_{x \rightarrow R-} \sum a_n x^n$.

Věta $\sum a_n x^n \dots R_1 \quad \sum b_n x^n \dots R_2$

$$\begin{aligned} \left(\sum a_n x^n \right)' &= \sum a_n n x^{n-1} & \forall |x| < R_1 \\ \int \left(\sum a_n x^n \right) &= \sum a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + c & \forall |x| < R_1 \\ \left(\sum a_n x^n \right) \left(\sum b_n x^n \right) &= \sum c_n x^n & \forall |x| < \min(R_1, R_2) \\ c_n &= a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0 \end{aligned}$$

4.3.1 Postup řešení

- Pro součet řad lze využít Abelovu větu – z řady vytvoříme mocninnou řadu s $R = 1$ a vypočítáme součet limitou.
- Pro rozvinutí vzorců do řad se dá použít poslední věta (většinou je třeba vzorec upravit – derivace/převod na součin).

4.4 Fourierovy řady

Definice $f \dots 2\pi$ -periodická $f \in R([0; 2\pi]) \widehat{=} R$ -integrovatelné

$$F_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$
$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)$$
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx$$

Věta $f \in P_{2\pi}$

(i) Je-li f po částech monotónní, pak $F_f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$

(ii) $\exists f'(x) \implies F_f(x) = f(x)$

Pozorování f lichá $\implies a_k = 0$; f sudá $\implies b_k = 0$

Věta (Parseval)

$$\int_0^{2\pi} (f)^2 = \frac{a_0^2}{2}\pi + \pi \sum (a_k^2 + b_k^2) \quad \text{interval integrálu může být posunutý}$$

Pozn.: Pomocí Parsevala můžeme zjistit, že součet úplně jiné řady je nějaké číslo.

4.4.1 Postup řešení

Výpočet Fourierovy řady

- 1) Spočítáme a_k, b_k a a_0 .
- 2) Určíme vzorec Fourierovy řady dle $F_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$.
- 3) Pokud se to po nás chce, zjistíme chování řady v daném bodě pomocí

$$F_f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2} \quad (\text{pokud je } f \text{ po částech monotónní})$$

Sinová / kosinová řada

- 1) Interval rozšíříme tak, aby byl souměrný podle 0.
- 2) Funkci upravíme tak, aby byla
lichá pro sinovou řadu $\implies a_k = 0$, sudá pro kosinovou řadu $\implies b_k = 0$,
ale aby její původní část zůstala nezměněna.
- 3) Vyřešíme Fourierovu řadu.

Součet řady

- 1) Najdeme k původní řadě mocninnou řadu takovou, aby se nám po derivaci něco zkrátilo.
- 2) Pokud je potřeba znovu derivovat, můžeme něco vytknout, aby se opět něco zkrátilo.
- 3) Zpátky integrujeme (nezapomenout doplnit vytknuté věci, po každé integraci porovnat s odpovídající derivací původní řady a vypočítat c).
- 4) Pokud jsme se pohybovali na hranici konvergence, musíme použít abela.

5 Jak na totální diferenciál, implicitní funkce a vázané extrém

5.1 Totální diferenciál

5.1.1 Formálně

Definice Necht' $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $i \in \{1, \dots, n\}$, $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ a $x \in G$. *Parciální derivací funkce f v bodě x podle i -té proměnné nazveme*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + t, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{t},$$

pokud limita existuje.

Definice Necht' $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ a $a \in G$. Řekneme, že lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je *totální diferenciál funkce f v bodě a* , jestliže

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{|h|} = 0.$$

Značíme $Df(a)$ a hodnotu v bodě $h \in \mathbb{R}^n$ značíme $Df(a)(h)$.

Věta (Postačující podmínka pro existenci totálního diferenciálu)
Necht' f má v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ spojitě parciální derivace, tedy funkce

$$x \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_j}(x), j = 1, \dots, n$$

jsou spojitě v a . Pak $Df(a)$ existuje.

Věta (O tvaru totálního diferenciálu) Necht' $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $a \in G$ a $f : G \rightarrow \mathbb{R}$. Necht' existuje totální diferenciál f v bodě a , pak existují parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ a pro všechna $h \in \mathbb{R}^n$ platí

$$Df(a)(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n.$$

5.1.2 Postup výpočtu

- 1) Chce-li se to po nás, nalezneme spojitě rozšíření na \mathbb{R}^n , tedy zkusíme najít limitu v problémovém bodě (typicky počátek).
 - a) Zkusíme jít k bodu z různých směrů ($x = 0, y = 0, x = y, \dots$).
 - b) Pokud limity nejsou stejné, limita neexistuje \implies Nelze spojitě rozšířit \implies Přejdeme na 2).
 - c) Pokud jsou limity stejné, odhadneme funkci tak, abychom ukázali, že se ze všech směrů blíží k danému bodu.
- 2) Pro $[x, y, \dots] \neq \text{problémový bod}$ vypočítáme totální diferenciál.
 - a) Vypočítáme parciální derivace (= provedeme derivace podle jednotlivých proměnných).
 - b) Ukážeme, že parciální derivace jsou spojitě na $\mathbb{R}^n \setminus \text{problémový bod} \implies$ existuje totální diferenciál.
 - c) Určíme totální diferenciál podle vzorečku ve větě O tvaru totálního diferenciálu.
- 3) Vypočítáme totální diferenciál pro problémový bod.

- Určíme parciální derivace v problémovém bodě (podle vzorečku v první definici, kde druhý člen čitatele známe – je to limita spočítaná v bodě 1)).
- Prohlásíme, že pokud existuje totální diferenciál, pak se musí rovnat vzorečku z věty O tvaru totálního diferenciálu, kam dosadíme za parciální derivace (pravděpodobně vyjde 0).
- Určíme, k čemu se blíží diferenciál podle definice a tím ověříme, jestli existuje. Dosadíme tedy do vzorečku z druhé definice, kde h je n -rozměrný vektor a a je problémový bod (také n -rozměrný vektor).
- Pokud se hodnota určená v bodě c) rovná 0, tak totální diferenciál existuje a rovná se hodnotě z b).

4) Napíšeme závěr, ve kterém shrneme naše výsledky do jedné funkce.

5.1.3 Příklad

Nalezněte spojitě rozšíření funkce $f(x, y) = (x^2 + y^2) \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$ na \mathbb{R}^2 a spočtěte parciální derivace a totální diferenciál všude, kde existují.

1) Problémový bod: $[0, 0]$

$$\begin{aligned} \text{a) } x = 0 : \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \left(y^2 \sin\left(\frac{1}{y^2}\right) \right) &= 0 \\ y = 0 : \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \left(x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) &= 0 \\ x = y : \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \left(2x^2 \sin\left(\frac{1}{2x^2}\right) \right) &= 0 \end{aligned}$$

b) Jsou stejné.

c) $(x^2 + y^2)$ se blíží k 0 a $\sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$ je omezená \implies celá funkce se blíží k 0.

2) $[x, y] \neq [0, 0]$

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) + (x^2 + y^2) \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \cdot \frac{-1}{(x^2 + y^2)^2} 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) + (x^2 + y^2) \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \cdot \frac{-1}{(x^2 + y^2)^2} 2y \end{aligned}$$

b) $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$ jsou spojitě (sp. + sp. = sp.; sp. · sp. = sp.; sp.(sp.) = sp.) v $\mathbb{R}^2 \setminus \{[0, 0]\} \implies \exists Df([x, y])$

$$\text{c) } Df(a)(h) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a)h_2 = 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) + (x^2 + y^2) \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \cdot \frac{-1}{(x^2 + y^2)^2} 2xh_1 + 2y \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) + (x^2 + y^2) \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \cdot \frac{-1}{(x^2 + y^2)^2} 2yh_2$$

3) $[x, y] = [0, 0]$

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{\partial f}{\partial x}([0, 0]) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f([0+t, 0]) - f([0, 0])}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) - 0}{t} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}([0, 0]) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f([0, 0+t]) - f([0, 0])}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) - 0}{t} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{b) } \text{Pokud } \exists Df([0, 0]) \text{ pak } Df([0, 0]) = \frac{\partial f}{\partial x}([0, 0])h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}([0, 0])h_2 = 0h_1 + 0h_2 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f([0+h_1, 0+h_2]) - f([0, 0]) - 0}{|h|} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h_1^2 + h_2^2) \cdot \sin\left(\frac{1}{h_1^2 + h_2^2}\right) - 0}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \cdot \sin\left(\frac{1}{h_1^2 + h_2^2}\right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (0 \cdot (\leq 1)) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{d) } 0 = 0 \implies \exists Df([0, 0]) = 0$$

5.2 Implicitní funkce

5.2.1 Formálně

Definice Necht' $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $f : G \rightarrow \mathbb{R}$. Řekneme, že $f \in C^1(G)$, pokud existují parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}, i = 1, \dots, n$ na G a jsou to spojité funkce na G .

Věta (O implicitní funkci)

Necht' $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je otevřená množina, $F : G \rightarrow \mathbb{R}, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n, \tilde{y} \in \mathbb{R}, (\tilde{x}, \tilde{y}) \in G$ a necht' platí

- (i) $F \in C^1(G)$,
- (ii) $F(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$,
- (iii) $\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) \neq 0$.

Pak existuje okolí $U \subset \mathbb{R}^n$ bodu \tilde{x} a okolí $V \subset \mathbb{R}$ bodu \tilde{y} tak, že pro každé $x \in U$ existuje právě jedno $y \in V$ s vlastností $F(x, y) = 0$. Píšeme-li $y = \varphi(x)$, pak $\varphi \in C^1(U)$ a platí

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))} \text{ pro všechna } x \in U \text{ a } j = 1, \dots, n.$$

Věta (O implicitních funkcích)

Necht' $G \subset \mathbb{R}^{n+m}$ je otevřená množina, $F_j : G \rightarrow \mathbb{R}, j = 1, \dots, m, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n, \tilde{y} \in \mathbb{R}^m, (\tilde{x}, \tilde{y}) \in G$ a necht' platí

- (i) $F_j \in C^1(G)$ pro $j = 1, \dots, m$,
- (ii) $F_j(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$, tedy $F_j(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m) = 0$ pro $j = 1, \dots, m$,
- (iii) determinant $m \times m$ matice parciálních derivací (= jakobián) F_j je nenulový, tedy

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\tilde{x}, \tilde{y}) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(\tilde{x}, \tilde{y}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(\tilde{x}, \tilde{y}) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(\tilde{x}, \tilde{y}) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Pak existuje okolí $U \subset \mathbb{R}^n$ bodu \tilde{x} a okolí $V \subset \mathbb{R}^m$ bodu \tilde{y} tak, že pro každé $x \in U$ existuje právě jedno $y \in V$ s vlastností $F_j(x, y) = 0$ pro každé $j = 1, \dots, m$. Píšeme-li $y_j = \varphi_j \in C^1(U)$ pro $j = 1, \dots, m$.

5.2.2 Postup výpočtu

1) Ověříme předpoklady zadané funkce f_i , bod a , vybrané souřadnice $y = (y_1, \dots, y_m)$ a zbylé souřadnice $x = (x_1, \dots)$. (m je většinou rovno počtu funkcí. Pokud je menší, pak je jedno, pomocí kterých rovnic se bude počítat.)

a) $\forall i \in \{1, \dots, m\} : f_i \in C^1$

b) $\forall i \in \{1, \dots, m\} : f_i(a) = 0$

c) $\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\tilde{x}, \tilde{y}) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(\tilde{x}, \tilde{y}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(\tilde{x}, \tilde{y}) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(\tilde{x}, \tilde{y}) \end{vmatrix} \neq 0.$

2) Platí-li předpoklady, pak prohlásíme, že na okolí bodu a lze y_1, \dots, y_m popsat jako graf funkce F vzniklé z f nahrazením proměnných y_i funkcemi $y_i(x)$.

3) Funkci F zderivujeme podle požadovaných souřadnic a do výsledných rovnic dosadíme bod a . Rovnice je potřeba počítat od nejjednodušších (jedna derivace) po složitější (více po sobě jdoucích derivací).

5.2.3 Příklad

Pro funkci $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ dokažte, že na okolí bodu $[0, 0, 1]$ lze určit proměnnou z , jako funkci a spočítejte následující derivace: $z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}$.

1) Ověříme předpoklady

a) $\frac{\partial f}{\partial z} = 2z$ sp., ostatní analogicky $\implies f(x, y, z) \in C^1$

b) $f(0, 0, 1) = 0 + 0 + 1 - 1 = 0$

c) $\frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 1) = 2z = 2 \neq 0$

2) Tedy na okolí bodu $[0, 0, 1]$ lze y popsat jako graf funkce $x^2 + y^2 + z^2(x, y) - 1 = 0$

3)

$$z_x : 2x + 2z(x, y)z_x(x, y) = 0$$

$$z_x(x, y) = \frac{-2x}{2z(x, y)} = \frac{-2 \cdot 0}{2 \cdot 1} = \frac{0}{2} = 0$$

$$z_{xx} : 2 + 2z_x(x, y)z_x(x, y) + 2z(x, y)z_{xx}(x, y) = 0$$

$$z_{xx}(x, y) = \frac{-2 - 2(z_x(x, y))^2}{2z(x, y)} = \frac{-2 - 0}{2 \cdot 1} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$z_{xy} : 0 + 2z_y(x, y)z_x(x, y) + 2z(x, y)z_{xy}(x, y) = 0$$

$$z_{xy}(x, y) = \frac{-2z_x(x, y)z_y(x, y)}{2z(x, y)} = \frac{0 \cdot 0}{2 \cdot 1} = \frac{0}{2} = 0$$

$$z_y : 2y + 2z(x, y)z_y(x, y) = 0$$

$$z_y(x, y) = \frac{-2y}{2z(x, y)} = \frac{-2 \cdot 0}{2 \cdot 1} = \frac{0}{2} = 0$$

$$z_{yy} : 2 + 2z_y(x, y)z_y(x, y) + 2z(x, y)z_{yy}(x, y) = 0$$

$$z_{yy}(x, y) = \frac{-2 - 2(z_y(x, y))^2}{2z(x, y)} = \frac{-2 - 0}{2 \cdot 1} = \frac{-2}{2} = -1$$

5.3 Vázané extrémy

5.3.1 Formálně

Věta (Lagrangeova věta o vázaných extrémech)

Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $s < n$, $f, g_1, \dots, g_s \in C^1(G)$ a mějme množinu $M = \{x \in \mathbb{R}^n : g_1(x) = \dots = g_s(x) = 0\}$.

Je-li $a \in M$ bodem lokálního extrému f vzhledem k M a vektory

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a), \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial g_s}{\partial x_1}(a), \frac{\partial g_s}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial g_s}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

jsou lineárně nezávislé, pak existují čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ tak, že

$$Df(a) + \lambda_1 Dg_1(a) + \dots + \lambda_s Dg_s(a) = 0$$

neboli

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) + \dots + \lambda_s \frac{\partial g_s}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(a) + \dots + \lambda_s \frac{\partial g_s}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} = 0$$

Poznámka Předchozí věta nám říká, že pokud extrém existuje, tak ho umíme najít z nějaké rovnice. Věta ale nezaručuje existenci extrému!

5.3.2 Postup výpočtu

1) Ověříme předpoklady pro funkci f a funkce g_i tvořící množinu M .

- Množina M je uzavřená. Dokážeme pomocí toho, že g_i jsou spojité funkce a že obor hodnot inverzní funkce je uzavřený, pokud je původní obor hodnot uzavřený. Případně provedeme ještě průnik těchto oborů hodnot, což je opět uzavřená množina.
- Množina M je omezená – najdeme nějakou kouli, do které se M vejde.
- Funkce f je spojitá.
- Pokud platí a) a b), pak je M kompaktní a pokud platí ještě c), pak f nabývá na M extrémů.

2) Vypočítáme extrémy uvnitř množiny M .

- Položíme $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$ a odtud vypočítáme souřadnice x_1, \dots, x_n , čímž dostaneme podezřelé body.

3) Vypočítáme extrémy na okraji množiny M .

- Ověříme, že Dg_i nejsou lineárně závislé. Případně najdeme body v M , pro které jsou lineárně závislé a ty zařadíme mezi podezřelé body.
- Sestavíme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j}(f + \lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_m g_m) &= 0 \\ g_i &= 0 \end{aligned}$$

Tuto soustavu vyřešíme, čímž dostaneme další podezřelé body.

4) Ve všech podezřelých bodech vypočítáme hodnotu funkce f a vybereme z nich maximum a minimum.

5.3.3 Příklad

Najděte minimum a maximum funkce $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 3z^2$ na množině $S = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 100\}$

1) Ověříme předpoklady

a) $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ spojitá
 $S = g^{-1}((-\infty, 100]) \implies$ uzavřená.

b) $S \subset B(0, 200) \implies$ omezená.

c) Funkce $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 3z^2$ je spojitá.

d) S omezená & S uzavřená $\implies S$ kompaktní & f spojitá $\implies f$ nabývá na S minima a maxima.

2) $M = \{x^2 + y^2 + z^2 < 100\}$

a)

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x$$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial y} = 4y$$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial z} = 6z \implies x = 0 \text{ \& } y = 0 \text{ \& } z = 0 \implies \text{podezřelý bod } [0, 0, 0]$$

3) $M = \{x^2 + y^2 + z^2 = 100\}$

a) Dg je lineárně závislá $\iff Dg = (0, 0, 0)$

$Dg = (2x, 2y, 2z) \neq (0, 0, 0)$ na okolí S

b)

$$2x + \lambda 2x = 0$$

$$4y + \lambda 2y = 0$$

$$6z + \lambda 2z = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 100$$

$$x = 0 : y = 0 : z^2 = 100 \implies z = \pm 10$$

$$x \neq 0 : \lambda = \frac{-2x}{2x} = -1$$

$$y \neq 0 : \lambda = \frac{-4y}{2y} = -2$$

$$4y - 2y = 0 \implies y = 0$$

$$6z - 4z = 0 \implies z = 0$$

$$x^2 = 100 \implies x = \pm 10$$

$$y^2 = 100 \implies y = \pm 10$$

4) $f(0, 0, 0) = 0 \implies$ minimum

$$f(\pm 10, 0, 0) = 100$$

$$f(0, \pm 10, 0) = 200$$

$$f(0, 0, \pm 10) = 300 \implies \text{maximum}$$

6 Jak na Fubiniho a diferenciální rovnice

6.1 Fubiniho věta – počítání obsahů nebo integrálů na intervalech

6.1.1 Formálně

Věta (Fubini) Necht' f je spojitá funkce na n -rozměrném intervalu I . Pak

$$(R) \int_I f(x) dx = \int_{a_1}^{b_1} \left(\cdots \left(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \right) dx_{n-1} \right) \cdots \right) dx_1$$

6.1.2 Postup výpočtu

1) Ideální je si situaci namalovat nebo představit. Pokud to nejde, snažíme se alespoň spočítat průsečíky, to nám může pomoci při stanovení okrajů počítané oblasti.

2) Použijeme Fubiniho větu

((a)) Pokud máme počítat objem či obsah množiny, počítáme $\int_I F$, kde $F = 1$.

((b)) Pokud máme počítat obecně $\int_I F$, použijeme následující vztah přímo.

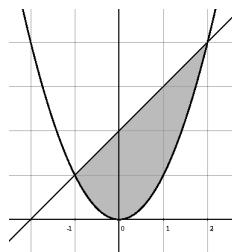
$$\int_I F(x) dx = \int_{a_1}^{b_1} \left(\cdots \left(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \right) dx_{n-1} \right) \cdots \right) dx_1$$

6.1.3 Příklad

Spočítejte obsah množiny $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y < x + 2\}$.

1) Spočítáme průsečíky a nakreslíme si obrázek.

$$\begin{aligned} x^2 &= x + 2 \\ x^2 - x - 2 &= 0 \\ x_1 &= -1 \\ x_2 &= 2 \end{aligned}$$



Proměnná x se pohybuje v rozmezí -1 a 2 a pro pevné x se y pohybuje od x^2 do $x + 2$.

2) Použijeme vztah a počítáme

$$\begin{aligned} \int_M 1 &= \int_{-1}^2 \left(\int_{x^2}^{x+2} 1 dy \right) dx = \int_{-1}^2 [y]_{x^2}^{x+2} dx = \int_{-1}^2 x + 2 - x^2 dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 = \\ &= 2 + 4 - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{3} = \frac{25}{6} \end{aligned}$$

6.2 Fubiniho věta – počítání integrálů

6.2.1 Postup výpočtu

1) Vnitřek integrálu si upravíme tak, abychom dostali rozdíl dvou podobných členů, které se liší jen jednou proměnnou apod. (např. $a^2 - b^2$).

2) Ve výrazu založíme novou proměnnou y a výraz upravíme do podoby např. $[y^2]_{y=b}^{y=a}$.

- 3) Výraz uvnitř integrálu zderivujeme podle y a zapíšeme jako integrál $\int_b^a \frac{\partial}{\partial y}(2y) dy$.
- 4) Pomocí Fubiniho věty prohodíme vnitřní a vnější integrál. $\int_m^n \int_a^b \dots = \int_M = \int_a^b \int_m^n \dots$
- 5) Dopočítáme integrál.

6.2.2 Příklad

Nechť $a > 0, b > 0$. Spočítejte hodnotu integrálu $\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} dx$.

1) Už máme.

2)

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} dx = \int_0^\infty \left[\frac{e^{-yx^2}}{x} \right]_{y=b}^{y=a} dx$$

3)

$$\int_0^\infty \left[\frac{e^{-yx^2}}{x} \right]_{y=b}^{y=a} dx = \int_0^\infty \left(\int_b^a \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{e^{-yx^2}}{x} \right) dy \right) dx = \int_0^\infty \left(\int_b^a \left(x^2 \cdot \frac{e^{-yx^2}}{x} \right) dy \right) dx$$

4)

$$\int_0^\infty \left(\int_b^a x \cdot e^{-yx^2} dy \right) dx = \int_M = \int_b^a \left(\int_0^\infty x \cdot e^{-yx^2} dx \right) dy$$

5)

$$\int_b^a \left(\int_0^\infty x \cdot e^{-yx^2} dx \right) dy = \int_b^a \left[\frac{e^{-yx^2}}{-2y} \right]_0^\infty dy = \int_b^a -\frac{1}{2y} dy = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{b}{a} \right|$$

6.3 Diferenciální rovnice prvního řádu

6.3.1 Formálně

Věta (O lepení řešení) Necht' $\delta > 0, \gamma > 0, \Omega \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená a $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá. Necht' y_l je řešení diferenciální rovnice

$$y' = f(x, y) \text{ na intervalu } (a - \delta, a)$$

a y_r je řešení této diferenciální rovnice na intervalu $(a, a + \gamma)$. Necht' navíc existují limity

$$\lim_{x \rightarrow a-} y_l(x) = \lim_{x \rightarrow a+} y_r(x) = A.$$

Potom funkce

$$y(x) = \begin{cases} y_l(x) & \text{pro } x \in (a - \delta, a) \\ A & \text{pro } x = a \\ y_r(x) & \text{pro } x \in (a, a + \gamma) \end{cases}$$

je řešení této diferenciální rovnice na intervalu $(a - \delta, a + \gamma)$.

6.3.2 Postup výpočtu

Rozhodování typu rovnice

- (a) $y'(x) = f(x) \dots$ Z výpočtu provedeme bod 4)b).
- (b) $y'(x) = g(y) \dots$ Z výpočtu provedeme bod 4)b).
- (c) $y'(x) = f(x)g(y) \dots$ Z výpočtu provedeme bod 4)b).
- (d) $y'(x) = a(x)y(x) + b(x) \dots$ Z výpočtu provedeme bod 4).
- (e) $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y^\alpha, \alpha \neq 0, 1 \dots$ Provedeme celý výpočet.

Výpočet

$$y'(x) = a(x)y + b(x)y^\alpha \text{ (Bernoulliho rovnice)}$$

- 1) Zavedeme substituci $z(x) = (y(x))^{1-\alpha}$.
- 2) Ze substituce vypočítáme $y(x)$ a $y'(x)$.
- 3) Vypočítané rovnice dosadíme do původní rovnice. Tím se rovnice převede na lineární rovnici 1. řádu s proměnnou z .
- 4) $z'(x) = a(x)z + b(x)$ (lineární rovnice 1. řádu)
 - a) Vyřešíme homogenní rovnici $z'(x) = a(x)z$.
 - b) $z'(x) = f(x)g(z)$ (separované proměnné)
 - A) Pro $g(z) \equiv 0$ nalezneme vyhovující z , která jsou řešením rovnice na \mathbb{R} .
 - B) Vytvoříme rovnici ve tvaru

$$\frac{1}{g(z)} \cdot \frac{dz}{dx} = f(x)$$

- C) Převedeme dx na pravou stranu rovnice a rovnici zintegrujeme. Dostaneme

$$\int \frac{dz}{g(z)} = \int f(x) dx$$

- D) Funkce zintegrujeme a dostaneme rovnici ve tvaru

$$H(z) = F(x) + c$$

- E) Z rovnice vyjádříme y . Najdeme tedy inverzní funkci k H . Výsledná rovnice vypadá takto:

$$z(x) = H^{-1}(F(x) + c)$$

- F) Projdeme celý postup a určíme definiční obor funkce a integrační konstanty.

- G) Pokusíme se rozšířit definiční obor přilepením nějakých konstantních řešení, která najdeme tak, že funkci $g(\alpha)$ ze zadání položíme identicky rovnou nule. Při lepení bychom měli ověřit, že slepovaná řešení v bodech lepení opravdu navazují. Měli bychom tedy ověřit rovnost limit ve větě O lepení řešení. Lepení se provádí jen v bodech, kde $g(\alpha) \equiv 0$. Slepit můžeme jakoukoliv kombinaci řešení.

- c) Nalezneme jedno řešení ve tvaru $z_0(x) = c(x)e^{A(x)}$ metodou variace konstant.

- A) V řešení vypočítaném v ii) dosadíme z_0 za z .
 - B) Upravené řešení dosadíme do původní rovnice (ve tvaru $z'(x) = a(x)z + b(x)$) za z . Budeme tedy muset řešení ještě zderivovat.
 - C) Měly by se zkrátit všechny členy, kde se vyskytuje $c(x)$.
 - D) Vyjádříme $c'(x)$ jako funkci x .
 - E) Zintegrujeme $c'(x)$ a získáme tak $c(x)$.
 - F) Funkci $c(x)$ dosadíme do rovnice získané v bodu A). Dostaneme tak $z_0(x)$.
 - G) Obecné řešení vytvoříme tak, že do rovnice $z(x) = z_0(x) + c(x)e^{A(x)}$ dosadíme $z_0(x)$ z bodu F), kde $c(x)e^{A(x)}$ je řešení homogenní rovnice vypočítané v bodě ii).
 - H) Projdeme celý postup a určíme definiční obor řešení a integračních konstant.

- 5) Výslednou rovnici pro z dosadíme zpět do rovnice pro $y(x)$ vypočítané v bodě d).

- 6) Projdeme celý postup a určíme definiční obor funkce a definiční obor integračních konstant. Mj. zkontrolujeme, na jakém oboru je výsledná funkce y diferencovatelná.

6.3.3 Příklad

Nalezněte řešení následující diferenciální rovnice: $xy^2y' = x^2 + y^2$.

Rozhodování typu rovnice

$$y' = \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x}$$

$$y' = \frac{1}{x}y + x \cdot y^{-2} \implies \text{celý výpočet}$$

Výpočet

$$y'(x) = a(x)y + b(x)y^\alpha \text{ (Bernoulliho rovnice)}$$

$$1) \alpha = -2 \quad z(x) = y^3$$

$$2) y(x) = \sqrt{3}z \quad y'(x) = \frac{1}{3}(z)^{-\frac{2}{3}} \cdot z' \quad z \neq 0$$

$$3) \frac{1}{3} \cdot z^{-\frac{2}{3}} \cdot z' = \frac{\sqrt{3}z}{x} + \frac{x}{\sqrt{3}z^2} \quad / \cdot 3z^{\frac{2}{3}} \\ z' = \frac{3}{x}z + 3x \quad x \neq 0$$

$$4) z'(x) = a(x)z + b(x) \text{ (lineární rovnice 1. řádu)}$$

$$a) z' = \frac{3}{x}z$$

$$b) z'(x) = f(x)g(z) \text{ (separované proměnné)}$$

$$A) \text{ Pro } g(z) \equiv 0 \text{ je } z(x) \equiv 0 \text{ řešením na } \mathbb{R}.$$

$$B) \frac{1}{y} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{3}{x} \quad x \neq 0, z \neq 0$$

$$C) \int \frac{dz}{z} = \int \frac{3}{x} dx$$

$$D) \ln |z| = 3 \ln |x| + c \quad c \in \mathbb{R}$$

E)

$$|z| = e^{3 \ln |x| + c} \quad c \in \mathbb{R}$$

$$|z| = (e^{\ln |x|})^3 \cdot e^c \quad c \in \mathbb{R}$$

$$|z| = x^3 \cdot c \quad c \in (0; \infty)$$

$$z = cx^3$$

$$F) \text{ na } \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$G) \text{ na } \mathbb{R} \quad c \in \mathbb{R} \quad (\text{protože } z \equiv 0 \text{ je řešením})$$

$$c) \text{ Nalezneme jedno řešení ve tvaru } z_0(x) = c(x)e^{A(x)} \text{ metodou variace konstant.}$$

$$A) z_0 = c(x)x^3$$

$$B) c'(x)x^3 + 3c(x)x^2 = \frac{3}{x}c(x)x^3 + 3x \quad x \neq 0$$

$$C) c'(x)x^3 = 3x$$

$$D) c'(x) = \frac{3}{x^2}$$

$$E) c(x) = -\frac{3}{x}$$

$$F) z_0 = -\frac{3}{x}x^3 = -3x^2$$

$$G) z(x) = -3x^2 + cx^3$$

$$H) \text{ na } \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad c \in \mathbb{R}$$

$$5) y(x) = \sqrt[3]{-3x^2 + cx^3}$$

6)

$$\begin{aligned}
 & z \neq 0 \\
 & -3x^2 + cx^3 \neq 0 \\
 & x \neq \frac{3}{c} \\
 & \text{na } \mathbb{R} \setminus \left\{0; \frac{3}{c}\right\} \quad c \in \mathbb{R} \quad \text{Na tomto oboru je } y(x) \text{ diferencovatelná.}
 \end{aligned}$$

6.4 Lineární rovnice n -tého řádu s konstantními koeficienty

6.4.1 Formálně

Definice Necht' $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Pak

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

nazveme *charakteristickým polynomem* rovnice

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0.$$

Věta (FSŘ pro rovnici n -tého řádu s konstantními koeficienty)

Mějme zadány $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ a necht' $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ jsou kořeny charakteristického polynomu násobnosti s_1, \dots, s_k (tedy $s_1 + \dots + s_k = n$). Pak funkce

$$e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \dots, x^{s_1-1}e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_k x}, \dots, x^{s_k-1}e^{\lambda_k x}$$

tvoří fundamentální systém řešení

$$y^{(n)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0 \text{ na } \mathbb{R}.$$

Věta (O speciální pravé straně pro rovnici n -tého řádu)

Mějme zadány $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, necht' $P_n(x)$ je polynom n -tého stupně a $(\alpha + i\beta)$ je k násobný kořen charakteristického polynomu (lze i $k = 0, \alpha = 0$ nebo $\beta = 0$). Pak rovnice

$$y^{(n)} + \dots + a_1y' + a_0y = P_n(x)e^{\alpha x} \cos \beta x \quad \text{popřípadě } P_n(x)e^{\alpha x} \sin \beta x$$

má na \mathbb{R} řešení ve tvaru

$$y_0(x) = x^k Q_n(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + x^k R_n(x)e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

kde Q_n a R_n jsou polynomy stupně n .

6.4.2 Postup výpočtu

1) Vypočítáme rovnici ve tvaru $y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_ny = 0$

a) Sestrojíme charakteristický polynom $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0$

b) Vypočítáme kořeny polynomu $\lambda_1, \lambda_2, \dots$

c) Do FSŘ přidáme členy

A) Je-li kořen λ_i reálné číslo přidáme $e^{\lambda_i x}$

B) Je-li kořen λ_i komplexní číslo ve tvaru $n = \alpha + i\beta$ přidáme $e^{\alpha x} \cos \beta x$ a pro komplexně sdružený kořen $e^{\alpha x} \sin \beta x$

C) Je-li kořen λ_i s -násobný, pak přidáme $e^{\lambda_i x}, xe^{\lambda_i x}, x^2e^{\lambda_i x}, \dots, x^{s-1}e^{\lambda_i x}$

d) Z FSŘ stanovíme řešení $y(x) = c_1(\text{člen z FSŘ}) + c_2(\text{člen z FSŘ}) + \dots$

e) Máme-li v zadání počáteční podmínky v nějakém bodě $y^{(n)}(x) = z$, potom pomocí derivování $y(x) = \dots$ a řešení lineárních rovnic dopočteme konstanty. Poznámka: $e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x)$

2) V případě, že pravá strana původní rovnice není rovna nule, tak počítáme následovně

- a) Zkusíme, jestli pravá strana vyhovuje větě O speciální pravé straně pro rovnici n -tého řádu, pak pokračujeme na bod d).
- b) V případě, že pravá strana jako celek větě nevyhovuje, zkusíme pravou stranu rozdělit na jednotlivé členy, u nichž vyzkoušíme jako v bodě a).
- c) Ani jeden případ nebyl splněn a pokračujeme tedy na bod e).
- d) Počítáme podle věty O speciální pravé straně pro rovnici n -tého řádu.
 - A) Určíme n – stupeň polynomu, α, β, k = násobnost kořenu $\alpha + i\beta$.
 - B) Za Q_n, R_n dosadíme $ax^2 + bx + c$ dle stupně polynomu.
 - C) Derivujeme rovnici do maximálního stupně derivace původní rovnice.
 - D) Určíme polynomy Q_n, R_n .
 - E) Vypočítáme $y_i(x) = \dots$
 - F) Výsledek $y(x) = y(x)$ z bodu 1) + $y_i(x)$.
 - G) Konec výpočtu.
- e) Počítáme pomocí variace konstant $y(x) = c_1(x)(\text{člen z FSŘ}) + c_2(x)(\text{člen z FSŘ}) + \dots$
 - A) Vypočítáme $y'(x)$.
 - B) Přidáme rovnici ve tvaru $c'_1(x)(\text{něco}) + c'_2(x)(\text{něco}) = 0$.
 - C) Derivujeme rovnici do maximálního stupně derivace původní rovnice.
 - D) Po zkrácení dopočítáme derivace konstant a konstanty.
 - E) Určíme výslednou rovnici $y_i(x)$.
 - F) Výsledek $y(x) = y(x)$ z bodu 1) + $y_i(x)$.
 - G) Konec výpočtu.

6.4.3 Příklady

Příklad 1)

$$\text{Zadání: } y'' - 3y' + 2y = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 2$$

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

$$c_1 + c_2 = 2$$

$$y'(x) = c_1 e^x + 2c_2 e^{2x} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ na } \mathbb{R}$$

$$c_1 + 2c_2 = 3$$

$$c_1 = 1 \quad c_2 = 1$$

$$y(x) = e^x + e^{2x}$$

Příklad 2)d)

$$\text{Zadání: } y'' + 3y' + 2y = e^x - 2x$$

1)

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 2$$

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ na } \mathbb{R}$$

2)

$$y_1'' - 3y_1' + 2y_1 = e^x$$

$$y_2'' - 3y_2' + 2y_2 = -2x$$

$$y_0 = y_1 + y_2$$

$$y_0'' - 3y_0' + 2y_0 = e^x - 2x$$

$$y_1 : P_n \equiv 1, n = 0, \alpha = 1, \beta = 0, \alpha + i\beta = 1 \implies k = 1$$

$$y_1 = axe^x$$

$$y_1' = ae^x + axe^x$$

$$y_1'' = 2ae^x + axe^x$$

$$y_1'' - 3y_1' + 2y_1 = 2ae^x + axe^x - 2ae^x - 3axe^x + 2axe^x = e^x$$

$$-ae^x = e^x \implies a = -1$$

$$y_1 = -xe^x$$

$$y_2 : n = 1, \alpha = 0, \beta = 0, \alpha + i\beta = 0 \implies k = 0$$

$$y_2 = a + bx$$

$$y_2' = b$$

$$y_2'' = 0$$

$$y_2'' - 3y_2' + 2y_2 = -3b + 2a + 2bx = -2x \implies -3b + 2a = 0 \text{ and } 2b = b$$

$$b = -1 \quad a = \frac{3}{2}$$

$$y_2 = -x - \frac{3}{2}$$

$$y(x) = -xe^x - x - \frac{3}{2} + c_1e^x + c_2e^{2x} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ na } \mathbb{R}$$

Příklad 2)e)

$$\text{Zadání: } y'' + y = \frac{1}{\sin x}$$

1)

$$y'' + y = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda = 0 \quad \lambda_1 = i \quad \lambda_2 = -i$$

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ na } \mathbb{R}$$

2)

$$y(x) = c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x$$

$$y_0'(x) = c_1' \cos x - c_1 \sin x + c_2' \sin x + c_2 \cos x$$

$$\text{trik : } c_1' \cos x + c_2' \sin x = 0$$

$$y_0''(x) = -c_1' \sin x - c_1 \cos x + c_2' \cos x - c_2 \sin x$$

$$\frac{1}{\sin x} = y_0''(x) + y_0(x) = -c_1' \sin x + c_2' \cos x \quad / \cdot \sin x$$

$$c_1' \cos x + c_2' \sin x = 0 \quad / \cdot (-\cos x)$$

$$1 = c_1'(-\sin^2 x - \cos^2 x) = -c_1' \implies c_1 = -x$$

$$c_2' = \frac{\cos x}{\sin x} \implies c_2 = \ln |\sin x|$$

$$y_0(x) = -x \cos x + \ln |\sin x| \sin x$$

$$y(x) = -x \cos x + \ln |\sin x| \sin x + c_1 \cos x + c_2 \sin x \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ na } (k\pi, (k+1)\pi) \quad k \in \mathbb{Z}$$

7 Jak na pravděpodobnost

7.1 Variace, kombinace

$$V_k(n) = \frac{n!}{n-k!} \quad V'_k(n) = n^k \quad C_k(n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad C'_k(n) = \binom{n+k-1}{k}$$

7.2 Charakteristiky

Název	Označení	Diskrétní	Spojitě
Střední hodnota	EX	$\sum_{i=1}^{\infty} x_i P[X = x_i]$	$\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$
	E \mathbb{X}	$(EX_1, \dots, EX_n)^T$	
Hustota	$f(x)$	není	$f(x)$
Distribuční funkce (zprava spojitá $\implies \bullet \circ$)	$F(x)$	$\sum_{y \leq x} P[X = y]$	$\int_{-\infty}^x f(t) dt$
Rozptyl	$\text{var}X \geq 0$	$E((X - EX)^2) = E(X^2) - (EX)^2$	
	$\text{var}\mathbb{X}$	$E(\mathbb{X} - E\mathbb{X})(\mathbb{X} - E\mathbb{X})^T =$ Matice: $\text{cov}(X_i, X_j), a_{i,i} = \text{var}X_i$	
Šikmost	μ'_3	$\frac{E(X-EX)^3}{\sqrt{\text{var}X^3}}$	
Špičatost	μ'_4	$\frac{E(X-EX)^4}{\sqrt{\text{var}X^4}}$	
Kovariance	$\text{cov}(X, Y)$	$E(X - EX)(Y - EY) = E(XY) - (EX)(EY)$	
Korelace	$\text{cor}(X, Y) \in [-1; 1]$	$\frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{(\text{var}X)(\text{var}Y)}}$	
	$\text{cor}(\mathbb{X})$	Matice: $\text{cor}(X_i, X_j), a_{i,i} = 1$	

7.3 Vztahy

$$E(a + bX + cY) = a + bEX + cEY$$

$$\text{var}(a + bX + cY) = b^2 \text{var}X + c^2 \text{var}Y + 2bc \cdot \text{cov}(X, Y)$$

7.4 Nezávislost

$$X_1, \dots, X_n \text{ nezávislé} \iff ([X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] = P[X_1 = x_1] \cdot \dots \cdot P[X_n = x_n]) \iff F_{\mathbb{X}}(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot F_{X_n}(x_n)$$

7.5 Diskrétní rozdělení

7.5.1 Binomické rozdělení: $\text{Bi}(n, p)$

Máme n nezávislých pokusů, zdar s pravděpodobností p . X je definováno jako počet zdarů.

$$P[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad EX = np \quad \text{var}X = np(1-p)$$

7.5.2 Alternativní rozdělení: $\text{Alt}(p)$

Speciální případ binomického rozdělení pro $n = 1$. Máme 1 pokus, zdar s pravděpodobností p . X je definováno jako počet zdarů.

$$P[X = k] = p^k (1-p)^{1-k} \quad EX = p \quad \text{var}X = p(1-p)$$

7.5.3 Poissonovo rozdělení: $\text{Poiss}(\lambda)$

Máme náhodné veličiny $X_1, X_2, \dots, X_i \sim \text{Bi}(n, p_n)$ a $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} np_n$.

$$\forall k \in \mathbb{N} : \lim_{n \rightarrow \infty} P[X_n = k] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = P[X = k] \quad EX = \lambda \quad \text{var}X = \lambda$$

7.5.4 Geometrické rozdělení: $\text{Geo}(p)$

Děláme náhodné pokusy, které skončí zdarem s pravděpodobností p . X je definováno, jako počet nezdarů před prvním zdarem.

$$P[X = k] = p(1-p)^k \quad EX = \frac{1-p}{p} \quad \text{var}X = \frac{1-p}{p^2}$$

7.5.5 Pascalovo rozdělení (negativně binomické pro přirozené r): $\text{Pas}((r, p))$

Zobecnění geometrického rozdělení: Děláme náhodné pokusy, které skončí zdarem s pravděpodobností p . X je definováno, jako počet nezdarů před prvními r zdary.

$$P[X = k] = \binom{r+k-1}{r-1} p^r (1-p)^k \quad EX = \frac{r(1-p)}{p} \quad \text{var}X = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

7.5.6 Hypergeometrické rozdělení: $\text{Hyp}(N, K, n)$

Máme N prvků, z nichž K má sledovanou vlastnost. n -krát táhneme jeden prvek bez vracení. X je definováno, jako počet vytažených prvků se sledovanou vlastností.

$$P[X = k] = \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad EX = \frac{nK}{N} \quad \text{var}X = \frac{nK}{N} \left(1 - \frac{K}{N}\right) \frac{N-n}{N-1}$$

Poznámka: Pro $K \rightarrow \infty, N-K \rightarrow \infty$ a $\frac{K}{N} \rightarrow p$ se dá ukázat, že $\text{Hyp}(N, K, n)$ jde k $\text{Bi}(n, p)$.

7.6 Spojitá rozdělení

7.6.1 Rovnoměrné rozdělení: Unif(a, b)

Pravděpodobnost je na intervalu (a, b) rozdělena rovnoměrně.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{1}{b-a} & x \in (a, b) \\ 0 & x \geq b \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & x \in (a, b) \\ 1 & x \geq b \end{cases} \quad EX = \frac{a+b}{2} \quad \text{var}X = \frac{(b-a)^2}{12}$$

7.6.2 Exponenciální rozdělení: Ex(λ)

Máme náhodný jev, který se vyskytuje v náhodných okamžicích v čase. Výskyty v nepřekrývajících se časových intervalech jsou nezávislé. Víme, že za časovou jednotku se průměrně jev stane λ -krát. X je definováno, jako čas čekání na první výskyt jevu.

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad EX = \frac{1}{\lambda} \quad \text{var}X = \frac{1}{\lambda^2}$$

7.6.3 Normální rozdělení: N(μ, σ^2)

Také Gaussovo rozdělení.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt \quad EX = \mu \quad \text{var}X = \sigma^2$$

Normované normální rozdělení: N(0, 1)

$$f(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad F(x) = \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad EX = 0 \quad \text{var}X = 1$$

7.7 Bayesova věta

Předpoklady: B_1, \dots, B_n jsou náhodné jevy, $B_i \cap B_j = \emptyset \forall i \neq j$ & $P(B_i) \neq 0 \forall i$ & $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{k=1}^n P(A|B_k)P(B_k)} \quad \text{Vychází z: } P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

7.8 Čebyševova nerovnost

$$P(|X - EX| \geq \epsilon) \leq \frac{\text{var}X}{\epsilon^2}$$

7.9 Centrální limitní věta

$$\frac{1}{\sqrt{n\sigma^2}} \left(\sum_{i=1}^n X_i - n\mu \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(0, 1) \quad P\left(\frac{1}{\sqrt{n\sigma^2}} \left(\sum_{i=1}^n X_i - n\mu \right) \leq x \right) \doteq \Phi(x) \quad \mu = EX_i \quad \sigma^2 = \text{var}X_i$$

8 Jak na výrokovou logiku

8.1 Schémata axiomů

$$A1) A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$A2) (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$$A3) (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

8.2 Odvozovací pravidla

O1) Modus ponens

$$\frac{A \quad A \rightarrow B}{B}$$

8.3 Věty o logice

Věta (O dedukci)

$$T \vdash A \rightarrow B \iff T \cup \{A\} \vdash B$$

8.4 Věty v logice

$$V1) \vdash A \rightarrow A$$

$$V2) \vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow C)$$

$$V3) \vdash \neg\neg A \rightarrow A$$

$$V4) \vdash A \rightarrow \neg\neg A$$

$$V5) \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$$

$$V6) \vdash A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B))$$

$$V7) \vdash (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$$

Dokazovat tyto věty v logice se člověk nejlépe naučí tak, že si prohlídne a pochopí hodně důkazů a uvědomí si, co se kde používá a potom už začne rozpoznávat situace, ve kterých může něco známého použít. Občas je taky dobré začít důkaz odzadu a zkoušet jak se k danému výsledku dá asi dostat.

9 Jak na indexaci dokumentů a kompresi

9.1 Indexace dokumentů

9.1.1 Invertovaný soubor

- 1) Vytvořit seznam lematizovaných slov a jejich pozic v dokumentech.
- 2) Seřadit a seskupit podle slov.

Zipfův zákon

$$f_t \cdot r_t = k = AN$$

$$\frac{f_t}{N} = p_t$$

$$r_t \cdot p_t = A$$

f_t ... frekvence výskytu slova v kolekci dokumentů

r_t ... pořadí slova dle četnosti

l, A ... konstanty

N ... počet slov v kolekci dokumentů

p_t ... pravděpodobnost výskytu slova v tomto typu textů (na dané pozici)

Kolik slov bude mít četnost mezi f_1 a f_2 ?

$$x = \frac{AN}{f_2} - \frac{AN}{f_1}$$

9.1.2 Signaturové soubory

Počet jedničkových bitů pro každý term $k = \log_2 \frac{1}{P_f}$

Počet bitů signatury (délka signatury) $d = \frac{1}{\ln 2} \cdot nk$

P_f ... pravděpodobnost chybného výběru dokumentu

n ... průměrný počet termů v dokumentu

9.2 Komprese

9.2.1 Fibonacciho kódy

Kódování

- 1) Napsat řadu (tak, aby poslední číslo bylo nejvyšší nižší než kódované).
- 2) Ignorovat první jedničku (takže zbude jen jedna).
- 3) Jít od konce řady a odečítat hodnoty od kódovaného čísla. Za každou odečtenou dát na výstup 1, za přeskočenou dát na výstup 0. Čísla píšeme pozpátku.
- 4) Na konec dát zarážku ($1^{k-1}0$), kde k je řád Fibonacciho řady. Příklad: $\text{Fib}_4 : 1110$ Pro Fib_2 je zarážka 1.

Dekódování

- 1) Najít první zarážku zleva (tvar viz kódování), před kterou je jednička.
- 2) Vytvořit řadu o tolika číslech, kolik je číslic před zarážkou.
- 3) Sečíst čísla řady, pro které je v kódu 1.

9.2.2 Eliasovy kódy

$\alpha(n) = \overbrace{0 \dots 0}^{n-1} 1$
 $\beta(n) = \langle n \rangle_2 = n$ vyjádřené v binární soustavě ... není jednoznačné
 $\beta'(n) = \beta(n)$ bez úvodní jedničky ... není jednoznačné
 $\tau(n) = \beta(n)\#$
 $\tau'(n) = \beta'(n)\#$
 $\gamma(n) = A_1 B_1 A_2 B_2 \dots B_{k-1} A_k$, kde $A = \alpha(|\beta(n)|)$; $B = \beta'(n)$
 $\gamma'(n) = AB$, kde $A = \alpha(|\beta(n)|)$; $B = \beta'(n)$
Poznámka: Rozdíl mezi γ a γ' je jen v uspořádání bitů.
 $\delta(n) = \gamma(|\beta(n)|) \cdot \beta'(n)$
 $\omega(n)$:

Kódování

```
n := read();  
k := "0";  
while [log2 n] > 0 do  
    k := concatenate(β(n), k);  
    n := [log2 n];  
end;  
return k;
```

Dekódování

```
i := 1;  
r := read(1); // počet čtených bitů = 1  
while r do  
    r := concatenate(r, read(i));  
    i := to_dec(r);  
    r := read(1);  
end;  
return i;
```

9.2.3 Fázování

- 1) Zjistíme počet symbolů (označme N).
- 2) Zjistíme $2^{\lfloor \log_2 N \rfloor} = K$.
- 3) Prvních $N - 2K$ symbolů očíslováme binárními čísly pomocí $\lfloor \log_2 N \rfloor$ cifer.
- 4) Pro další symboly přidáme další cifru (na konec) a číslováme po jedné.

9.2.4 Shannon-Fanovo kódování

- 1) Spočítáme frekvence výskytů symbolů (včetně mezer).
- 2) Seřadíme znaky od nejmenší frekvence.
- 3) Spočítáme kumulativní pravděpodobnosti.
- 4) Postupně seznam půlíme a přiřazujeme bity dokud nejsou jednoznačně určeny všechny symboly (levá půlka je 1, pravá 0).

9.2.5 Huffman (statický)

- 1) Spočítáme frekvence výskytů symbolů (včetně mezer).
- 2) Seřadíme znaky od nejmenší frekvence.
- 3) Spojováním dvojic zleva vytváříme strom. Nové vrcholy zařazujeme do řady (co nejvíce doprava).
- 4) Levé hrany jsou 0, pravé 1.

9.2.6 Huffman (adaptivní)

Kódování

- 1) Začínáme se stromem s jedním (speciálním) vrcholem.
- 2) Načteme znak a najdeme ho ve stromu. Na výstup vypisujeme čísla na hranách (0 vlevo, 1 vpravo). Pokud ve stromu není, jdeme do speciálního vrcholu a pak vypíšeme znak na výstup.
- 3) Pokud znak ve stromu nebyl, provedeme následující.
 - a) Přidáme ho.
 - b) Při aktualizaci vah kontrolujeme, jestli ve stromu ve směru doprava nahoru není vrchol s menší vahou než je nová hodnota aktualizovaného. Pokud ano, vezmeme poslední takový a přehodíme ho s aktualizovaným (celé podstromy).
 - c) Takto postupujeme aktualizací až do kořene.

Dekódování

- 1) Čteme bity a podle nich hledáme ve stromě.
- 2) Pokud dojdeme do listu s písmenem, vypíšeme ho.
- 3) Dojdeme-li do speciálního vrcholu, načteme znak ze vstupu.
 - a) Znak vypíšeme.
 - b) Znak přidáme do stromu stejně jako při kódování.

9.2.7 Intervalové kódování

Kódování

- 1) Načteme slovo.
- 2) Pokud se ještě nevyskytlo, uložíme ho a jeho pozici do slovníku a vypíšeme ho na výstup.
- 3) Pokud se už vyskytlo, najdeme ho ve slovníku, od aktuální pozice odečteme pozici uloženou ve slovníku, rozdíl vypíšeme a do slovníku uložíme současnou pozici.

Dekódování

- 1) Načteme řetězec.
- 2) Je-li to slovo, vypíšeme ho a uložíme společně s aktuální pozicí do slovníku.
- 3) Je-li to číslo, odečteme ho od aktuální pozice a ve slovníku hledáme výslednou pozici. Nalezené slovo vypíšeme a do slovníku uložíme aktuální pozici.

9.2.8 Nerozepsané metody

BSTW

Obdoba intervalového kódování.

LZ77

Okénka (posíláme 3 údaje).

LZSS

Obdoba LZ77 (posíláme bit a 2 údaje).

LZ78

Posíláme odkaz do slovníku a rozšiřující znak.

LZW

Posíláme jen odkaz do slovníku (na začátku je v něm abeceda).

BWT

Matice, permutace.