

Pravděpodobnostní prostor (Ω, \mathcal{A}, P)

Ω - prostor libovolná konečná množina (nebo podmnožina R_1, R_p)

\mathcal{A} - σ -algebra, systém podmnožin z Ω (uzavřený na \cap, \cup)

P - pravděpodobnost

$A \in \mathcal{A}$ - je

ω - elementární je (card $\Omega = n \rightarrow 2^n$)

$$P(\Omega) = 1 \geq P(A) \geq P(\emptyset) = 0$$

A_1, A_2, \dots disjunkt (neslučitelné)

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) \quad P(\cup A_i) = \sum P(A_i)$$

$$(P(\emptyset) = P(\emptyset \cup \emptyset) \rightarrow P(\emptyset) = 0)$$

Card $\Omega = n$ } Úloha klasické pravděpodobnosti $\Rightarrow P(A) = \frac{\# \text{příznivých}}{\# \text{všech}}$
 $P(\omega_i) = \frac{1}{n}$

Pr. 1) Tahání lísků (\bar{S}, D) 25 tahů
 20 - špatných
 5 - dobrých
 $P(1. \text{ tah}) = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$
 $P(2. \text{ tah}) =$

$$\Omega = \{(i, j) \mid i - \text{tah}, j - \text{lísk}\}$$

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega) \Rightarrow \text{Umín tedy}$$

$P(A \cup B), P(A \cap B), P(\bar{A})$
 - v praxi nepoužitelné

Pr. 1 pokračování: $\bar{S} \quad N$
 $\bar{S} \quad N$
 N

$\frac{1}{25}$	

 \rightarrow různé P pro ω

V obecném případě: $P(\cup A_i) = \sum P(A_i) - \sum P(A_i \cap A_j) + \dots$ (PIE)

Neslučitelné jevy (neznamena nezávislé)!

A definice: A, B jsou nezávislé: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

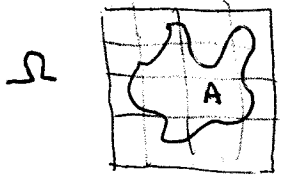
$$P(A|B) = P(A)$$

\forall zůzemi Ω jen na jevy
 patřící B .

A_1, A_2, \dots, A_n jsou nezávislé: $P(A_{i1} \cap \dots \cap A_{ik}) = \prod_{j=1}^k P(A_{ij}) \quad \forall k=1, \dots, n$

Ověření nezávislosti je těžší než ověření neslučitelnosti.
 \hookrightarrow moc dobře to nejde 😞

Rozdělení a Pravděpodobnost (Věta o úplné pšti)



$\Omega = \cup H_i$ $H_i \cap H_j = \emptyset \quad \forall i \neq j \Rightarrow$ Úplný systém jevů

$$P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A \cap \cup H_i) = P(\cup (A \cap H_i)) = \sum P(A \cap H_i) = \sum P(A|H_i) \cdot P(H_i)$$

\uparrow $H_i : A \cap H_i$
disjunktem

Podmíněná pravděpodobnost:

$P(\Omega, A, P) \quad A, B \subseteq \Omega \quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = (P(B) \neq 0) = \frac{\# \text{Nastal } AB}{\text{Nastalo } B}$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

Bayesova věta: "Mám AIDS, kde jsem byl pozitivní?"

$\Omega = \cup H_i \quad (H_i \cap H_j = \emptyset \quad \forall i \neq j)$

$$P(H_i|A) = \frac{P(A \cap H_i)}{P(A)} = \frac{P(A|H_i) \cdot P(H_i)}{P(A)} = \frac{P(A|H_i) \cdot P(H_i)}{\sum P(A|H_j) \cdot P(H_j)}$$

Náhodná veličina

$X: (\Omega, A, P) \mapsto (R, B)$ (tedy náhodná funkce)

! Model reality!

Př.: házím mincí \rightarrow zajímavé rozdělení počtu zdarů

$\{0, 1, \dots, n\} \rightarrow \{0 \text{ zdarů}, 1 \text{ - 11 -}, \dots, n \text{ - 11 -}\}$

$\left. \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ n \end{matrix} \right\} 2^n \rightarrow \left. \begin{matrix} 0 \text{ zdarů} \\ 1 \text{ - 11 -} \\ \vdots \\ n \text{ - 11 -} \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \text{umín} \\ \text{spočítat} \\ P \text{ pro každé řádek} \end{matrix}$

Dobrá jednoduchá pozor, ale více P element jeví.

Rozdělení n.v.: $\{x_i\} \quad x_i \in R_1 \quad p_i > 0, \sum p_i = 1 \quad x_i \dots$ elementární jevy

1) Hod mincí $\left\{ \begin{matrix} Z - p \dots 1 \\ N - 1-p \dots 0 \end{matrix} \right\}$ alternativní n.v.

2) $0 \leq i \leq n$

$$p_i = P(X=i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \quad B(n, p)$$

3) Tahy s vrácením

3) Tahy bez vrácení (Geometrické rozdělení)

B a Ā koule tahám k, chci l B

$$p_k = \frac{\binom{n}{k} \cdot \binom{m}{k-l}}{\binom{n+m}{k}}$$

4) Čekám na 1. zdar: p bude h-tý tah?

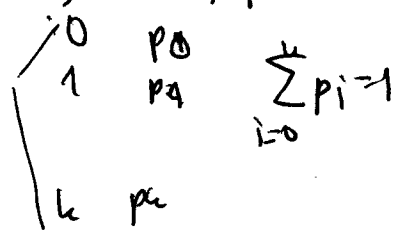
$$P(\underbrace{NN \dots N}_{h-1} Z) = q^{h-1} \cdot p$$

①

$$\text{Alt}(p) = \{0, 1\} \dots \{q=1-p, p\}$$

Jakýkoliv počet (náhodný), který na dichotomické odpovědi (ano, ne)

② Pěti náh. pols:



$$P(\text{průběh } n_0 \dots 0, n_1 \dots 1, \dots, n_k \dots k) =$$

Poln. rozdělení

$$\binom{n}{n_0} \binom{n-n_0}{n_1} \dots \binom{n-n_0-n_{k-1}}{n_k} p_0^{n_0} p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k} =$$

$$\frac{n!}{n_0! \dots n_k!} p_0^{n_0} \dots p_k^{n_k}$$

Multinomické rozdělení: $Mul(n; p_0, \dots, p_k)$

③ h - hodů $P(\text{průběh } k\text{-zdaří}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ binomické $Bi(n, p)$

$$= \sum_{i=1}^n \text{Alt}_i(p)$$

Odpovídá tahům s vracením z ohrádky s prvky dvojice dmkh.

Budu-li tahat bez vracení

④ Hypergeometrické rozdělení:

bílá - A
černá - B

Jaká je ~~pravd~~ $P(n \text{ prvků vstáh, } k \text{ bílých})$ bez vracení

$$= \frac{\binom{A}{k} \cdot \binom{B}{n-k}}{\binom{A+B}{n}} =$$

a) $= \sum_{i=1}^n Y_i$ $Y_i \begin{cases} 0 & \text{černá} \\ 1 & \text{bílá} \end{cases}$

↑ JSOU ZÁVISLÉ! Jsí bílá?

b) $\underbrace{0 \dots 0}_A$ Byla jsi vytáhena? $= \sum_{i=1}^A Z_i$ opět závislé

Pro $A \rightarrow \infty$ $\frac{A}{A+B} \rightarrow p$ je Bi , HP6 to samé (závislost se ztratí)

⑤ $\{0, 1, \dots, n\}$ $P(X=i) = \frac{1}{n+1}$ - rovnoměrné rozdělení

⑥ Čekání na první zdar (nezávislé pols) $P(1. \text{ zdar v } n\text{-tém})$

⑦ Poissonovo $X \sim Po(\lambda)$

$$P(X=i) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} \quad i=0, 1, 2, \dots$$

umělé rozdělení

$$e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$$

$$= P(N_1 \dots N_n) = p \cdot q^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p \cdot q^{n-1} = p \cdot \frac{1}{1-q} = 1$$

(Ověření rozdělení)

(limitní rozdělení pro příklady)

V knize G. Wimmer: Discrete Probability ~ 300 divů

Distribúcia je ∞ mnoho, dôležité ju tu, ktoré odpovedajú reálnym úlohám.

(4)

Charakteristiky náhodných veličín:

- ① Rozdelení - obor hodnôt $\dots x_i$
 pravdepodobnosti s množičt náleža - p_i

$$\begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_i$$

- ② Stredná hodnota $EX = \sum_i x_i p_i$ (číslo pre fyzika, hmot: kde čo udáva v prírode)
 Stredná hodnota je zájímavá
 pretože, máme-li mnoho pokusů!!

- ③ Rozptyl $var X = E(X - EX)^2 = EX^2 - (EX)^2$

Utopický:



Reálny lomý:



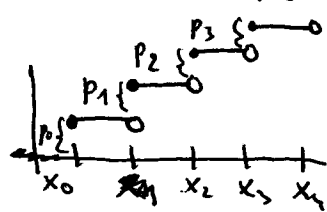
Dnes:



EX užde stejne!

(Vzorec na $var X$ je více, vychází více!)

- ④ Distribuční funkce
 $F(x) = P(X \leq x) \quad x \in \mathbb{R}_1$



- ⑤ Charakteristická fce
 $\varphi(t) = E e^{itX}$

jednoznačně
 dává rozdělení

Vlastnosti EX

X, Y - n.v.

$a, b, c \in \mathbb{R}_1$

$E(a + bX + cY) = a + bEX + cEY \rightarrow a$ - posunutí, b - změna měřítka

$var(a + bX + cY) = b^2 var X + c^2 var Y + 2bc cov(X, Y)$

$cov(X, Y) = E(X - EX) \cdot (Y - EY)$ - měří tu závislost

Čebyševova nerovnost

$$P(|X - EX| > \varepsilon) \leq \frac{var X}{\varepsilon^2} \dots \text{hodně hrubý odhad}$$

Aplikace: Zákon velkých čísel

X_1, X_2, \dots - nezávislé n.v. $EX_i = \mu$

$$P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{var \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i}{\varepsilon^2} = \frac{\frac{\sigma^2}{n}}{\varepsilon^2} \rightarrow 0$$

$\sigma^2 < \infty, n \rightarrow \infty$

Pravděpodobnostní míra udává hodnotu
 Právě je dobrý odhad střední hodnoty.

Rozdělení funkce h.v. mohou formálně zůstat

Centrální limitní věta

X_1, \dots, X_n — nezávislé h.v.

$EX_i = \mu_i \quad \text{var } X_i = \sigma_i^2$

$$P\left(\frac{\sum X_i - E\sum X_i}{\sqrt{\text{var} \sum X_i}} \leq x\right) \stackrel{n \rightarrow \infty}{\approx} P(Z \sim N(0,1) \leq x) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right)$$

↑
standardizace

$$\approx \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Reakce věchan po přírodně.

Aproximace rozdelení součtu a příměrů.

$\{x_j\}, \{p_j\} \leftrightarrow A(x) = \sum_j p_j x^j$ (generátor funkce)

$A'(x) = \sum_j j p_j x^{j-1} \big|_{x=0} \quad p_j = \frac{A^{(j)}(0)}{j!}$

$A|_t(p) = q \cdot x^0 + p \cdot x^1 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + \dots$

$A'(x)|_{x=1} = EX$

$\text{var } X = EX^2 - (EX)^2 \neq E[X \cdot (X-1)] = E[X^2 - X] = EX^2 - EX$

$\Rightarrow EX^2 = EX(X-1) + EX$

$Eg(x) = \sum_i g(x_i) p_i \quad g: X \rightarrow X \cdot (X-1)$

$A''(x) = \sum_j j(j-1) x^{j-2} p_j \quad A''(1) = \sum_j j(j-1) \cdot p_j$

Tedy $\text{var } X = A''(1) + A'(1) - (A'(1))^2$

Funkce přežítin:

X — d.f. $F(x) = P(X \leq x)$

f.p. $Q(x) = P(X > x) = 1 - F(x)$

má smysl pro $X \sim$ doba života

RŮZNÝ LET: X, Y — nezávislé h.v.

$X \sim A(x)$

$Y \sim B(x) \quad X+Y \sim A(x) \cdot B(x)$

$B_i(n, p) = \sum_j A_i(n, p) \rightarrow$ máte tedy v.f. B_i

$X \backslash Y$	y_0	y_1	
x_0			
x_1			

$x_i + y_j$

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	3
2	2	3	4

$$P(X+Y=j) = \sum_{i=0}^j P(X=i \text{ a } Y=j-i) = \sum_{i=0}^j P(X=i) \cdot P(Y=j-i) = \sum_{i=0}^j p_i \cdot q_{j-i}$$

Věta o konvoluci

$$\sum A(x) \cdot B(x) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} p_i x^i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} q_j x^j \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^j p_i q_{j-i} \right) \cdot x^j$$

Padé approximation: viz věta 4.

$$X_1, X_2, \dots, X_n \rightarrow T_n = \sum_{i=1}^n X_i \quad T_n^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad n \text{ -- první konstanta}$$

čísleno



chceme náhodný počet stromů

X_i -- nezávislá, stejné rozdělení f -- $P(X=i) = p_i$... $A(x)$

N -- náh. veličina g -- $P(N=n) = g_n$ -- $B(x)$

129 -- vajíček

< nasadí -- p

ne -- $1-p = q$

$X_i \sim A(x)$ $N \sim B(x)$

$S_N = X_1 + \dots + X_N$ -- počet hrochů šů na prodej

$$P(S_N=k) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{P(S_N=k | N=n)}_{P(S_n=k)} \cdot \underbrace{P(N=n)}_{q_n} = \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n=k) \cdot q_n$$

OBEČNĚ

(zpět k příkladu) $S_n = X_1 + \dots + X_n$ $X_i \sim A(x)$ $S_n \sim B(x)$ $P(S_n=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \cdot \frac{1}{n!} = \frac{p^k \cdot e^{-1}}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} (1-p)^{n-k} \cdot \frac{1}{n!} \cdot 1^k =$$

$$= \frac{1^k e^{-1} p^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(1-p)^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1^k \cdot e^{-1} (1-p)^0 \cdot p^k}{k!} = \frac{(1-p)^k}{k!} \cdot e^{-1} p = \frac{(1-p)^k}{k!} \cdot e^{-1} p$$

$\sim P_0(1-p)$

Intuice: $ES_N = EN \cdot EX = 1 \cdot p \rightarrow$ odpovídá

OBEČNĚ: $P(S_N=k) = \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n=k) q_n = r_k$

$$S_N \dots C(x) = \sum_{k=0}^{\infty} r_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_n P(S_n=k) q_n \right) x^k = \sum_n q_n \left(\sum_k P(S_n=k) x^k \right) =$$

$\sum_k P(S_n=k) x^k = A(x)^n$

$$= \sum_n q_n (A(x))^n = \sum_n q_n y^n = B(y) = \underline{\underline{B(A(x))}}$$

$\sum_k P(S_n=k) x^k = A(x)^n$

$$ES_N = B'(A(x)) \cdot A'(x) \big|_{x=1} \quad (\sum p_i x^i \big|_{x=1} = \sum p_i = 1)$$

$$= B'(1) \cdot A'(1) = EN \cdot EX$$

$$\text{Var } S_N = B''(A(x)) \cdot A'(x)^2 + B'(A(x)) \cdot A''(x) + B'(A(x)) \cdot A'(x) - (B'(A(x)) \cdot A'(x))^2 \big|_{x=1}$$

$$= B''(1) \cdot (EX)^2 + EN \cdot A''(1) + EN \cdot EX - (EN \cdot EX)^2$$

$X^{(0)} = 1$
 $x^{(n)}$ počet potomků $X - P(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P(X=k)}{P_k} \cdot x^k$

Potomci mají také další potomky, ale diver. zůstane zachováno

$X^{(1)} = X_1 + \dots + X_n$
 $p^{(1)}(x) = P(x)$
 $p^{(2)}(x) = P(P(x))$
 $p^{(3)}(x) = P(P(P(x))) < p^{(2)}(P(x))$
 \vdots

Jaký je přední počet potomků v n -té generaci?
 $(P(P(P(\dots P(x) \dots)))'_{x=1} = P'(P(x)) \cdot P'(x)$

$= P'(1) \cdot P'(1) \cdot \dots \cdot P'(1) = (EX)^n$

Rozptyl: FUD!

$\rightarrow 0 \quad EX < 1$
 $\rightarrow 1 \quad EX = 1$
 $\rightarrow \infty \quad EX > 1$

Náhodné procházky (1 z mnoha přístupu...)

X_1, X_2, \dots náh. vel. nezávislé

$S_0 = x_0 \quad S_k = S_0 + \sum_{i=1}^k x_i$

Příklad: $S_0 = i$

$x_i \begin{cases} +1 & p = \frac{1}{2} \\ -1 & 1-p = \frac{1}{2} \end{cases}$

$\rightarrow S_k$ jak si rojí po k hrách?

Rekurentní jevy

- mohou být závislé, současný stav závisí na předchozím - např. karty (Ranā), čas bude nepojitý

$\{E_{j1}, \dots, E_{jn}\}$ - řádky, jak S_k výsledky za sebou

$P(A) = \sum P(A \cap H_i)$ - úplná p.ř.

- zobecnění čekání v posl. alternativní jevu

Podobně jako čekání na zdar v negativní binomické

Když jev nastane - zapomenou minulost

Budeme chtít popsat to co známe z $Ge(p)$ a $NBi(p)$

Např. 32 za sebou - komplikované přímo nejde - označme $\{$

U_n - jev nastal -- $U(x)$
 J_n - jev nastal poprvé $F(x)$ } Jaký je mezi nimi vztah?

Věta o úplné p.ř.: $\Omega = \{\text{dobu 1. výsledku}\}$

Když nastal $\{$ poprvé $1, 2, \dots, n$ - tyto jsou nezávislé

(nemohl nastat poprvé zároveň 1. a 2.)

$U_n = \{\{ \text{nastal v čase } n \} \}$ nastal na konci posl. prvku délky $n-1, n-2, \dots, 0$

$U_n = f_0 \cdot U_n + f_1 \cdot U_{n-1} + \dots + f_n \cdot U_0$ pro $n=1, 2, \dots$ $1 = U_0 \neq f_0 \cdot U_0 = 0$

$$\begin{aligned} X^1: u_1 &= f_0 \cdot u_1 x^1 + f_{u0} x^1 \\ X^2: u_2 &= f_0 u_2 x^2 + f_1 u_1 x^2 + f_2 u_0 x^2 \\ &\vdots \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} X^1: \\ X^2: \end{aligned}} \right\} \text{yn\u00edben\u00e1 } x^i$$

$$U(x)-1 = U(x) \cdot F(x)$$

Tvorba y trojn\u00edk\u00e1r fce - nap\u00ed\u0159e se rekurze, p\u0159\u00edd\u00e1j\u00ed se x^i a se\u010fte se

$$F(x) = \frac{U(x)-1}{U(x)} \Rightarrow f_i = \frac{F^{(i)}(0)}{i!} \quad \left\{ \text{nenastal} \leftrightarrow \infty \right.$$

$\{u_n\}$ - netvo\u0159 v\u00e1z\u00e1n\u00ed p\u00e1ti

$\{f_n\}$ - tvo\u0159 ----- || -----

$$f_n^{(2)} = P(\{\text{nasal v \u010dare n podnik\u00e9}\}) \rightsquigarrow \{f_n\}^2 \otimes$$

$$f_n^{(3)} = f_0 f_n + f_1 f_{n-1} + \dots + f_n f_0$$

$$f_n^{(r)} = P(\{\text{nasal v \u010dare n po r-t\u00e9}\}) \rightsquigarrow \{f_n\}^r \otimes$$

Ti jva nez\u00e1visl\u00e9 z definice 4.2

- doba \u010dek\u00e1n\u00ed mezi $i-1$ a i -t\u00fdm v\u00fdskyt\u00e9m $\{$

$$P(T_1 + T_2 + \dots + T_r \leq X) \approx \Phi(x)$$

\wedge ke spo\u00edt\u00e1n\u00ed p\u0159\u00edmo konvoluc\u00ed

$$f^r \begin{cases} \nearrow 0 & \delta < 1 \\ \searrow 1 & \delta = 1 \end{cases}$$

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i < 1$$

$$\sum_i f_i^{(r)} = (F(x))^r|_{x=1} = f^r$$

Kdy\u017e sleduj\u00ed rekurentn\u00ed jev, tak to \u017ee se jev zopakuje n\u00e9kolikn\u00e1t nebo 1 nikdy nic mezi!

$$\mu = \sum i f_i$$

$$\text{Definice 6: } f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i$$

emaz\u00ed - v\u00e1\u0159 se l\u00e9kov\u00e1\u010dsk\u00e1 (m\u00e1n\u00e1r)
p\u0159edod\u00ed - v\u00e1\u0159 se p\u00e1rk\u00e1n\u00e9

$$\text{D\u00edk\u00e1t v\u00e9b 11: } F(x)|_{x=1} = \sum f_i 1^i = \sum f_i$$

$$F(x)|_{x=1} = \frac{U(x)-1}{U(x)}|_{x=1} = \frac{\sum u_i 1^{i-1}}{\sum u_i} < \frac{\text{Kone\u010dn\u00e1}-1}{\text{Kone\u010dn\u00e1}} < 1$$

$$\frac{\infty-1}{\infty} = 1$$

Náhodná procházka (obecně)

9

mějme n.v. X_1, X_2, \dots , uplně libovolné

$$S_0 = X_0$$

$$S_k = S_{k-1} + X_k = X_0 + X_1 + X_2 + \dots + X_k$$

Kumulativní součet n.v.

Příklad: Hry Pata-Velka

$$X_i = \begin{cases} +1 & p \\ -1 & 1-p=q \end{cases}$$



$S_0 = 0$ $S_k \rightarrow$ stav hry po k -hách

$\{-$ jen na rven, periodické, v kterých počtu kroků se
herní vrátí: $u_{2n+1} = 0$ $u = 0, 1, \dots$

$$u_{2n} = \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} = \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} \cdot \frac{1}{2^{2n}} \approx \text{Bi}(2n, p)$$

Stirlingova formule: $n! \approx n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n}$

$$\approx \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{2\pi 2n}}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}} \cdot \frac{1}{2^{2n}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2\pi n}}{2\pi n} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

$$\sum \frac{1}{n} = \infty$$

$$EX_i = 0 \quad \text{var } X_i = EX_i^2 - (EX_i)^2 = 1 \quad ES_k = \sum EX_i = 0$$

$$\text{Var } S_k = \sum \text{Var } X_i = n$$

$$S_k \rightarrow S_k^* = \frac{1}{\sqrt{k}} S_k \Rightarrow \text{Var } S_k^* = 1$$

Rekurentní jev

$\{E_0, E_1, E_2, \dots\}$ konečná nebo spočetná množina výsledků

AB JEDNOHO POKUSU

$$P(A \text{ up } p) \cdot P(\{E_{j1}, E_{j2}, \dots\}) = P(\underbrace{\{E_{j1}, \dots, E_{jn}\}}_A) \cdot P(\underbrace{\{E_{j_{n+1}}, \dots, E_{j_{n+m}}\}}_B)$$

hasal v n a $n+m$: $\{E_{j1}, \dots, E_{jn}\}, \{E_{j_{n+1}}, \dots, E_{j_{n+m}}\}$
 \downarrow \downarrow
 $\{$ $\{$ Zapomínání minulosti

$$u_n = P(\text{hasal v čase } n)$$

$$f_n = P(\text{---||---||--- poruše})$$

$$u_n = f_0 u_n + f_1 u_{n-1} + \dots + f_n u_0 \rightarrow u_0 = 1, f_0 = 0$$

$$u(k) - 1 = u(k) \cdot F(k)$$

dodětkování
 $p^n = u_n + p \cdot u_{n-1} + p^2 u_{n-2} + \dots$
 po změně X^n máme u_n f_n !

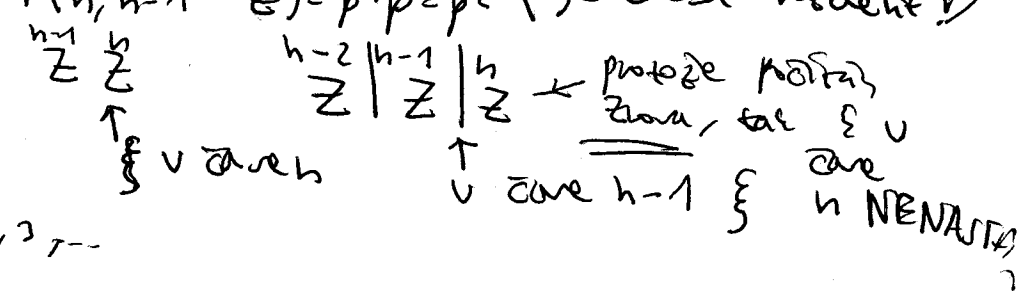
$$\sum_{i=1}^n f_i = 1 \quad \sum i f_i \rightarrow EX$$

vrátí se
 nekonečně

padlo $r-2$ za rekon
 Jak $h^{(r)}$? Nakonci $\mathbb{Z}\mathbb{Z}$
 Skladane zbytku z domina $\mathbb{N}\mathbb{Z}\mathbb{N}$
 Pro $r \geq 2$ korit!

$r=2$, $\{ \dots$ nastali $\mathbb{Z}\mathbb{Z}$ za rekon
 ale predt je $\mathbb{Z}\mathbb{Z}$ nebo $\mathbb{N}\mathbb{Z}\mathbb{Z}$

$U_n = P(\text{parovpust } E_{j1}, \dots, E_{jn} \text{ konci } \boxed{\mathbb{Z}\mathbb{Z}})$
 $\equiv n, n-1$ padl \mathbb{Z} $P(n, n-1 \mathbb{Z}) = p \cdot p = p^2$
 (Nas zajimaji uredy $\mathbb{Z}\mathbb{Z}$, ale po rek. jez je treba vedet!)



$$p^2 = U_n + p U_{n-1}$$

$$U_1 = 0 \quad U_0 = 1$$

$n=2, 3, \dots$

$$p^2 = U_2 + p U_1 \quad | x^2$$

$$p^3 = U_3 + p U_2 \quad | x^3$$

$$\rightarrow \sum_{i=2}^{\infty} p^i x^i = \frac{p^2 x^2}{1-x}$$

$$U(x) - 1 = p \cdot U(x) \Rightarrow U(x) = \frac{1}{1-p}$$

specificky $\rightarrow F(x)$
 $(F(1) \leq 1, F'(1))$

Nas $F(x)$ a jeh hote.
 r zdani za rekon

$$p^r = U_n + p U_{n-1} + p^2 U_{n-2} + \dots + p^{r-1} U_{n-r+1}$$

$$U_0 = 1 \quad U_1 = U_{n-r+1} = 0$$

$$\Omega = (\mathbb{Z}, \mathbb{N}\mathbb{Z}, \mathbb{NN}\mathbb{Z}, \dots)$$

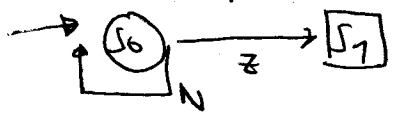
$$\equiv \mathbb{Z}(1, \mathbb{N}, \mathbb{NN})$$

$$P = (p_1, p_2, p_3, \dots)$$

$$VF: \mathbb{Z} \rightarrow p^x$$

$$\mathbb{N} \rightarrow q^x$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} p q^{i-1} x^i = p x \cdot \sum_{i=1}^{\infty} q^{i-1} x^{i-1} = \frac{p x}{1-q x}$$



$$S_0 = 1 + N S_0 \Rightarrow S_0 = \frac{1}{1-N}$$

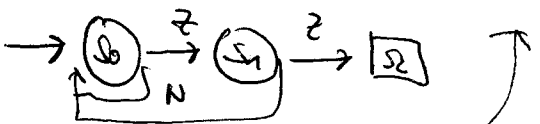
$$S_1 = Z S_0$$

$$S_1 = \frac{Z}{1-N} \sim \frac{p x}{1-q x}$$

$$S_0 - 1 = N S_0 = Z S_0$$

$$S_0 = \frac{1}{1-N-N^2}$$

$$S_1 = \frac{Z}{1-N-N^2}$$



$$S_0 = 1 + N S_0 + N S_1$$

$$S_1 = Z S_0$$

$$S_2 = Z S_1$$

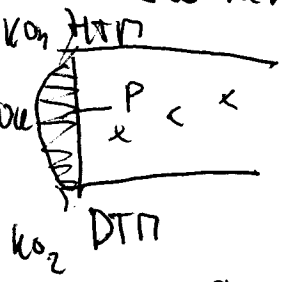
$$S_2 = \frac{Z^2}{1-N-N^2} \mid \frac{p x - Z}{q x - N} \} \frac{q^2 x^2}{1-q x - p q x^2} = U(x)$$

KONTROLA KVALITY

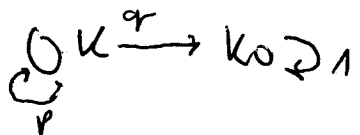
Výrobní pás → výrobky < ^{dolný} _{špatný}

Kdy výrobek zastavit?

Shewhartova pravidla: Kdy je potřeba ustat výroba? (Dolný, Horní)



Toleranční mez



Vak samostat DTD, HTD? Opakujeme!

$$\inf \{n \mid \log \frac{f_1(x_n)}{f_0(x_n)} > h\} = \inf \{n \mid |X_i| > h\} \quad (\text{bez } || \rightarrow \text{uvážení jen horní mez})$$

$f_0(x)$ -- distribuce dobrých výrobků
 $f_1(x)$ -- " " " " špatných

technická pomůcka

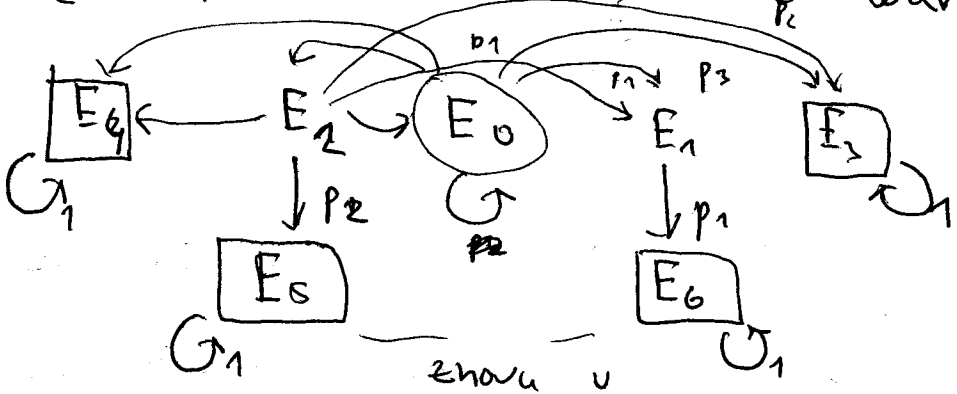
nestaráme se 0 minut

X_i -- $\begin{cases} 0 & \text{KO} \\ 1 & \text{OK} \end{cases}$

NN. NZ -- $G(p)$

E_3	KO1	p_3
E_4	WA1	p_1
E_0	OK	p_0
E_2	WA2	p_2
E_1	KO2	p_1

Zvětšila se kv. variabilita
 Znovu pohyb $z_j(p_i)$ za reáln
 v téže z_j warning oblasti
 = tendence pokračovat



Název první oblasti např.: téže W oblasti
 $P(\text{poprvé se dostaneme do stavu } E_0 \text{ v } n\text{-tém kroku}) = ?$

Poženo reprezentovat maticí

$$P(E_{j_1}, \dots, E_{j_n}) = \prod_{i=1}^n P(E_{j_i})$$

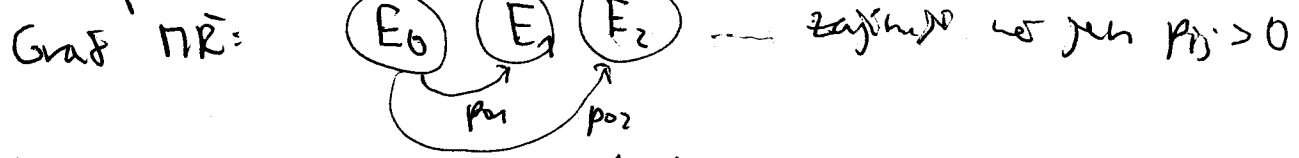
Konkretne pokusy (ať zavrúte čísla), ale skatane je 0
hájikan jejich vlastnost a bereme v potaz
historii nahližehon okénkem bezprossedni mihlona.

II \rightarrow matice predchod

E_0 mize poyet do kúdes sm TP matice $p_{ij} = P(E_i \rightarrow E_j)$
 $E_1 \rightarrow$ sasy $= P(E_j | b_j | \text{jech } v E_i)$
 $P(\text{predch}) = 1 \sum_j p_{ij} =$
 $= P(\text{predch } \& E_i \text{ hánan}) = 1$

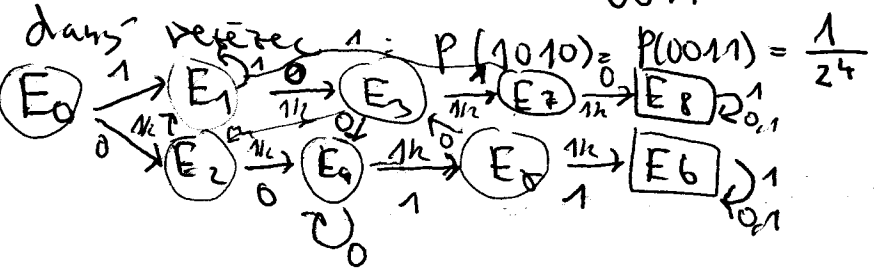
TP $n \times n$ vechy rádkové sasy jech 1

$a = \begin{pmatrix} a_0 \\ 1 \\ a_{n-1} \end{pmatrix} \rightarrow$ počáteční pravděpodobnosti



Príklad: $p = \frac{1}{2}$ Stavec: 1010
0011

Uzime teh, kom pade dle



9 savy TP = $\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}_{9 \times 9}$

$a = (1, 0, \dots, 0) \rightarrow$ vřd začíná v E_0

$P(E_0 \rightarrow E_8) = ?$

$P(E_0 \rightarrow E_6) = ?$

$TP = (p_{ij})$ P_{Ai} predch $E_i \rightarrow E_j$ po jednon kúch

$P(E_i \rightarrow E_j \text{ po chon kúch}) : E_i \xrightarrow{E_0} E_j = \sum_k P(E_i \rightarrow E_k \rightarrow E_j) = \sum_k p_{ik} p_{kj}$

~~TP^2 po 2 kúch~~ ~~INDUKCE~~ TP^n po n kúch

Definice 12, Poznámka 19 a 20, Věta 19
Zuv nahndre $\{p_{ij}\}, \{f_{ij}\}$ zústahon.

Věta 21 - podok: $P(x) = \frac{U(x)-1}{U(x)} < 1 \quad (U(x) < \infty)$
 $f = \{f_{ij}\} < 1 \rightarrow f_{ij} > 0$ je predch, $\forall i$ - jev tráv

Prá, uha $E_0 \rightarrow \dots \rightarrow E_n$ $E_0, E_n \rightarrow$ z hod hesteh
 E_0, E_n ja niteho E_1, \dots, E_n

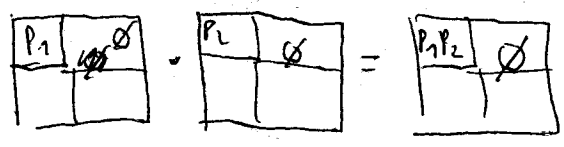
Definice 13: ať Roznámká 21

Nerovnostech: z každého sam do každého se lze dostat

Rozložitelý: obsahuje uzavřenou množinu sam.

Definice 16 ať Věta 25:

Hledám SSK může pomoci!



~~$P_{ij} = P(E_i \rightarrow E_j)$~~

Stacionární řešení \rightarrow všech sam stejně sm:

nerovnostech, NR s maticí pravd. předod: P a vektoru a.

$$V = P^T V \dots V = (V_0, V_1, \dots) \quad V_i > 0 \text{ a } \sum V_i = 1$$

Řešení musí být rozdělen pravděpodobnosti

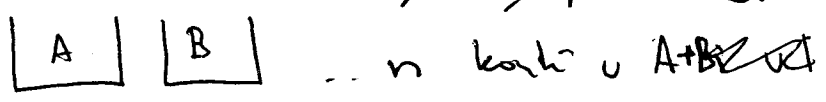
Věta 20: Stac řeš u nerovně. NP \Leftrightarrow trvale nekubové sam

E_j = v nekonečné postupnosti je buďto vždycky neustále
vystupovat. + střední doba návratu je konečná

$P_{ij}^{(n)}$ -- $P(E_i \rightarrow E_j \text{ po } n \text{ krocích})$

V_j -- $P(\text{v ustáleném stavu bude ve stavu } E_j)$

Pr: Ehrenfestaův myšlenkový pokus I.



Náhodně vyberu nádobu a kuličku z ní předám do druhé.
Stav systému -- # kuliček v A

$$E_i \begin{cases} \rightarrow E_{i+1} & \frac{1}{2} \\ \rightarrow E_{i-1} & \frac{1}{2} \end{cases} \quad i=1, \dots, n-1$$

$$E_0 \begin{cases} \rightarrow E_0 & \frac{1}{2} \\ \rightarrow E_1 & \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$E_n \begin{cases} \rightarrow E_{n-1} & \frac{1}{2} \\ \rightarrow E_n & \frac{1}{2} \end{cases}$$

\cong hra malí/velká s 2 hodnotami hrací
náhodná procházka po přímce s
odražením v cíři sčítání

Uvěřte nerovnostech MR

V_j -- z jaké rozdělení?

\rightarrow gaussovo rozdělení ???

$$TP = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$PT = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & \dots \\ 1/2 & 0 & 1/2 & \dots \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} V &= P^T \cdot V \\ V_0 &= \frac{1}{2} V_0 + \frac{1}{2} V_1 \Rightarrow \frac{1}{2} V_0 = \frac{1}{2} V_1 \Rightarrow V_1 = V_0 \\ V_1 &= \frac{1}{2} V_0 + \frac{1}{2} V_2 \Rightarrow V_2 = V_0 \\ V_2 &= \frac{1}{2} V_1 + \frac{1}{2} V_3 \Rightarrow V_3 = V_0 \\ V_4 &= \frac{1}{2} V_{n-1} + \frac{1}{2} V_n \Rightarrow V_n = V_0 \end{aligned}$$

$$Ab, \sum v_i = 1 \rightarrow v_0 = \frac{1}{n+1}$$

(10)

Náhod. rozdělení a je rovnoměrné!
Žádný zkus, jak jsme si mysleli!

Pr: Pokus 22:

Náhodně vezmeme kuličku a přemísíme ji do druhé nádoby
Kulička vyjde s pravd: $1/n$

$$\begin{matrix} \frac{n-i}{n} & E_{i+1} & & \\ & & & \\ \frac{i}{n} & E_{i-1} & & \end{matrix} > E_i \quad E_0 < \begin{matrix} E_0 & 0 \\ E_1 & 1 \end{matrix} \quad E_n < \begin{matrix} E_{n-1} & 1 \\ E_n & 0 \end{matrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{n} & 0 & \frac{n-1}{n} & 0 \\ 0 & \frac{2}{n} & 0 & \frac{n-2}{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$v_0 = \frac{1}{n} v_1 \quad v_1 = v_0 + \frac{2}{n} v_2$$

$$\Downarrow v_1 = n v_0 \quad \Downarrow v_2 = \frac{n}{2} (v_1 + v_0) = \frac{n \cdot (n-1)}{2} v_0$$

~~rozložení~~ Rozložení $V = (n v_0, \binom{n}{2} v_0, \binom{n}{3} v_0, \dots)$

→ do skuteč. Binomické rozdělení \approx Gaussovy distrib.

Hra: $qGE_0 \rightarrow p$
vlevo barva
vpravo barva

$\leftarrow p$

$$p < 1/2 \dots \infty$$

$$p > 1/2 \dots \approx 0$$

$$p = 1/2 \dots ?$$

MŘ nerozložitelný, pokud $\exists SR \Rightarrow$ vždy jsou dvě nenulové
(vždy jsou dvě typy)

$$P = \begin{pmatrix} q & p & \dots \\ q & 0 & p & \dots \\ 0 & q & 0 & p & \dots \end{pmatrix} \quad P^T = \begin{pmatrix} q & q & 0 & \dots \\ p & 0 & q & \dots \\ 0 & p & 0 & q & \dots \end{pmatrix}$$

$$v_0 = q v_1 + q v_2 \Rightarrow v_1 = \frac{p}{q} v_0$$

$$v_1 = p v_2 + q v_3 \Rightarrow v_2 = \frac{p-pq}{q^2} v_0 = \frac{p^2}{q^2} v_0$$

$$v_2 = p v_3 + q v_4 \Rightarrow v_3 = \frac{p^2 - pq^2}{q^3} v_0 = \frac{p^2 - qp^2}{q^3} v_0 = \frac{p^2(1-q)}{q^3} v_0$$

$$V = (v_0, \frac{p}{q} v_0, (\frac{p}{q})^2 v_0, \dots)$$

$$v_0 \cdot (1 + \frac{p}{q} + \frac{p^2}{q^2} + \dots) = 1$$

$$\frac{1}{1 - \frac{p}{q}}$$

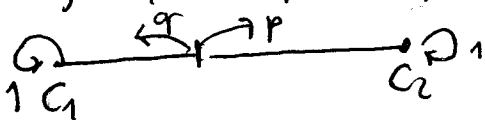
$$v_0 = 1 - \frac{p}{q} = \frac{q-p}{q} \quad (\text{kdž } p \geq \frac{1}{2} \rightarrow v_0 \leq 0) \quad \text{a to nelze!}$$

Stacionární rozdělení \exists pro $p < 1/2$ a je geometrické
Co tedy s $p = 1/2$? Rozložení $P(E_0 \rightarrow E_0 \text{ po } n \text{ krocích})$ - řeší se pro $n=1$

Propriété MR: $(P, \alpha) \quad P_i = P(E_i \rightarrow E_j)$

16

Ložiste: T - predložci; C_1, C_2 - usavne mrazil
kajen sloven C_i opustit



$$x_j = P(E_j \in T \rightarrow C) \quad x_j^{(1)} = P(\text{prejda v 1. knožen})$$

$$X_j = X_j^{(n)} + \sum_{Y \in T} \alpha_{j,Y} P_{j,Y} X_Y$$

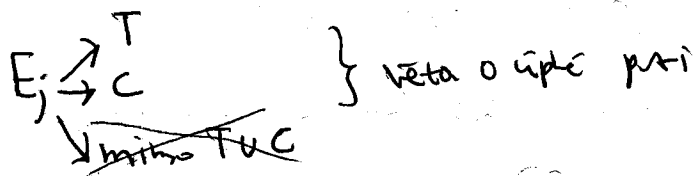
$$x_j^{(n)} = p(E_j) \rightarrow C \text{ p.n.č. v } n \rightarrow \infty \text{ (konst.)}$$

$$X_j = \sum_{h=1}^{\infty} x_j^{(h)} \rightarrow \text{physic z vert 0 couple part}$$

$$= x_j^{(1)} + \sum_{n=2}^{\infty} x_j^{(n)} z$$

$$X_j^{(n+1)} = \sum_r P_{jr} X_r^{(n)}$$

$$x_j^{(n)} + \sum_{h=2}^{\infty} \sum_{r \in T} p_{j,r} x_r^{(n-h)} = x_j^{(n)} + \sum_{r \in T} p_{j,r} \underbrace{\sum_{h=2}^{\infty} x_r^{(n-h)}}_{x_r^{(n)}} = x_j^{(n)} + \sum_{r \in T} p_{j,r} x_r \quad \square$$



Aplikace: |singin, model

Analiza obrazu:

Analise Graph:

$$Y = \mu + \sigma u \quad X \sim f(x, \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{normal - sum})$$

latent model \longleftrightarrow resultant

Intro. model \leftarrow resümee \searrow $X \sim f(x, \sigma_i, f^2)$ \leftarrow normal law
 $\sigma \sim \exp \{-\beta H(\sigma)\}$ \uparrow higgs piece

TT - hexavirlosi (sibing predispoln!)
10V

Který není velký, možná obklopen je nejmenší podoba, jestliže jen napotom 4.

Meine  \rightarrow Abnahme \Rightarrow Maß Abnahme

Sabatier-Effekt: Zinnblei
→ Zinnblei

Rede toho co chci pozvat koho a co H.

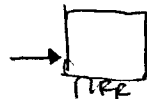
System

সত্য: $E_0, E_1, -$

#prvhi system

např: pulzující před NFK

#aut ha parkovisti



Bedingungen: U könnte car. Interventione
bei 1 zsmf. heb. zordn.
(s. v. v. p. v. v.)

pravd-úle lež 1 žna je haché mla

$E_n \rightarrow E_{n+1}$ -- posíusel
 $E_n \rightarrow E_n$ -- rovná
 $E_n \rightarrow E_{n-1}$ -- úmnoží

Implicitní rovnice: ~~je~~ doložit hodnotu
 udělati se s tím sep. hodnotěm
 \rightarrow nejvícejší předpoklad

(17)

$X \sim \text{Exp}(\lambda)$ resolve $f(x, \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$ $x > 0, \lambda > 0$ $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$

$P(X > x+y | X > x) = \frac{P(\overset{z0}{x > x+y} \ \& \ \overset{jinde}{X > x})}{P(X > x)} = \frac{P(X > x+y)}{P(X > x)} = \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda x}} = e^{-\lambda y} =$

\rightarrow zapomenout vlastnost

$P(x < X \leq x+\Delta | X > x) = \frac{P(x < X \leq x+\Delta \ \& \ X > x)}{P(X > x)} = \frac{F(x+\Delta) - F(x)}{1 - F(x)} \cdot \frac{\Delta}{\Delta} \approx \frac{f(x)}{1 - F(x)} \cdot \Delta$

$\lambda(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = \text{Funkce intenzity}$

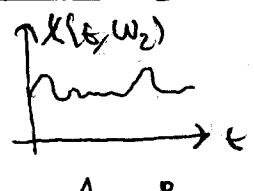
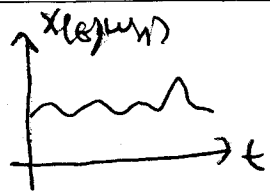
pro exp: $\frac{\lambda e^{-\lambda x}}{1 - 1 + e^{-\lambda x}} = 1$

Parameter sep. hodnoten je integritan

$E_X = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$

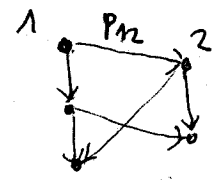
$\left(\int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} = \lambda e^{-\lambda x} + \int_0^{\infty} \lambda \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda x} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} = \lambda e^{-\lambda x} + \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty} = \lambda e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \right)$

udělati/jednotlivě on = iterativ



$$X(t) \equiv X(t, \omega)$$

Markovský proces:



Počítací procesy

→ # událostí za čas t — $N(t) \sim \{N(t), t \geq 0\} = \text{def. citliv. proces}$

- I) $N(t) \geq 0 \quad \forall t$
- II) $N(t) \in \mathbb{N}_0 \quad \forall t$
- III) $\forall s < t \quad N(s) \leq N(t)$
- IV) $\forall s < t \quad N(t) - N(s) = \# \text{ událostí v } (s, t]$

nezávislé přírůstky

def $(\Rightarrow) \forall s \leq t \leq u \leq v \quad N(t) - N(s) \perp N(v) - N(u)$ → nezávislé

stacionarita (rac. přírůstky)

def $(\Leftrightarrow) N(t) \stackrel{D}{=} N(t+s) - N(s) \quad \forall s \geq 0 \quad (N(h+0) - N(0))$

Poissonov proces $\{N(t); t \geq 0\}$

s intenzitou $\lambda \geq 0$

- I) $N(0) = 0$
- II) nezávislé přírůstky
- III) $P(N(t+s) - N(s) = h) = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^h}{h!} \sim \text{Poissonova hodnota}$
 $\sim \text{Poissonova hodnota}$
 $\text{Poissonova hodnota}$
 $\text{Poissonova hodnota}$
- Pozn: $E[N(t)] = \lambda t$

Věta/Alternativní definice

- i) $N(0) = 0$
- ii) rac. & nezávislé přírůstky
- iii) $P(N(h) = 1) = \lambda h + o(h), h \rightarrow 0 \quad \& \quad o(h) \sim 0$
- iv) $P(N(h) \geq 2) = o(h), h \rightarrow 0$

Doba mezi navzájemnými událostmi

$\{N(t); t \geq 0\}$ 1. událost — čas T_1
 mezi 1. a 2. — čas T_2
 mezi 2. a 3. — čas T_3

$$T_n \stackrel{D}{=} \text{Exp}(\lambda)$$

Doba proces $\{T_n, n \in \mathbb{N}\}$
 $P(T_1 > t) = P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}, t \geq 0$
 $T_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$
 $P(T_2 > t) = E[P(T_2 > t | T_1)]$
exp. hodnota

$$\begin{aligned}
 P(T_2 > t | T_1 = s) &= P(0 \text{ událostí v } (s, s+t] | T_1 = s) = \\
 &= P(0 - 11 - v(s, s+t)) = \\
 &= P(\underbrace{N(s+t) - N(s)}_{N(t)} = 0) = e^{-\lambda t}
 \end{aligned}$$

Pozn: $[N(t) \geq n] \Leftrightarrow [\underbrace{\sum_{i=1}^n T_i}_{S_n} \leq t]$ Doba celá do n -té události

$$\begin{aligned}
 f_{S_n}(t) &= \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad t \geq 0 \\
 S_n &\sim \Gamma(n, \lambda) \rightarrow \text{gammafce} \\
 F_{S_n}(t) &= P(S_n \leq t) = P(N(t) \geq n) = \sum_{j=n}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \Big|_{dt}
 \end{aligned}$$

Příklad: Úbhy na venkovské přecházejí "Poissonovsky" s intenzitou $\lambda = 1$. (např.: 1 úbhy/min) $E[N(t)] = \lambda t$

a) Očekávání čas do desáté úbhy?

b) Jaká je pr, že čas mezi 10. a 11. úbhou přesáhne 2 min?

a) $E(S_{10}) = \sum_{i=1}^{10} E T_i = 10 \cdot E T_1 = 10 \cdot \frac{1}{1/1} = 10 \text{ min.}$

b) $P(T_{11} > 2) = e^{-2/1} = \underline{\underline{e^{-2} \approx 0.133}}$

$P(T_i \leq t) = 1 - e^{-\lambda t / \lambda}$

c) Každá úbha ve označuje: $p_1 = p$ - prázdný typ 1
 $1-p$ - prázdný typ 2

Zajímají mě jen typy I,

$N_1(t)$ (analogicky $N_2(t)$)

$$N(t) = N_1(t) + N_2(t)$$

Věta: $\{N_1(t) | t \geq 0\}$ i $\{N_2(t) | t \geq 0\} \rightarrow$ poisson s

intenzitou $p\lambda$ a $(1-p)\lambda$.

D.Ú: Imizanti poissonovsky s intenzitou 10/t den.

slavový lovci: 1/12

? Úmír 2011... př. ze zadrž. slavový lovci nebude imizant.

$P(T_1 > 4) = \underline{\underline{e^{-4/(10 \cdot 1/12)}}}$

$X \sim \exp(\lambda)$
 $f(x, \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$ λ intenzita $EX = \frac{1}{\lambda}$ $\text{var } X = \frac{1}{\lambda^2}$



Intenzita:

• spletkosť
 $1 - F(x) = P(X > x) \equiv$ výrobek prežije dobu x X ... doba do konce života

• ve frontách

výstupu udalosti za jednotku času

$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t} \rightarrow$ počet záukestiev v $[0, t]$
 $t \rightarrow \infty$

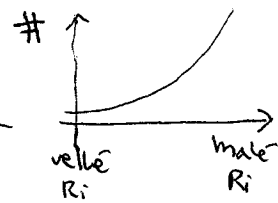
$X_1, \dots, X_n \sim R(0, 1)$

$X_0 = 0 < X_{(1)} < X_{(2)} < \dots < X_{(n)} < (X_{(n+1)}) = 1$

$R_i = X_{(i)} - X_{(i-1)} \quad i = 1, \dots, n+1$

? rozdelenie R_i (intenzita konstanta)

— je to exponenciálny historický bode



Induktor:

$E_{n+1} \xrightarrow{\lambda h + o(h)} E_n$
 $E_n \xrightarrow{\lambda h + o(h)} E_n$ \rightarrow z toho dostaneme dif. rovnice
 $E_{n-1} \xrightarrow{\lambda h + o(h)} E_n$

$E_{n+1} \rightarrow o(h) \rightarrow$ zanedbateľná malá

Telefónna budka:

E_0 ... nikdo nevolá

E_1 ... budka obsadená

E_2, \dots, E_n ... kde sú zvonky

E_{n+1} ... dala kde nepripadá (max. dĺžka fronty)

Intenzita: $\lambda_k = \lambda \quad \forall k = 0, 1, \dots, n-1$

$\mu_0 = 0$

$\mu_1 = \mu \rightarrow$ dĺžka hovoru

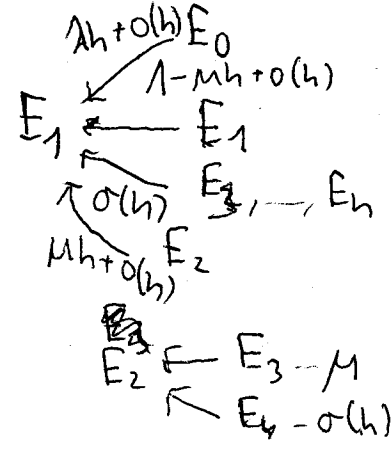
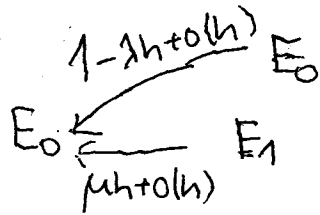
$\mu_k = \mu \quad k = 1, 2, \dots, n$

$0 = (\lambda + \mu) \cdot p_1 + \lambda p_2 + \lambda p_0$

$\lambda p_0 = \mu p_1 \Rightarrow p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0 \quad \mu p_2 = \frac{\lambda^2}{\mu} p_0 + \lambda \frac{\lambda}{\mu} p_0 - \lambda p_0 \Rightarrow p_2 = \frac{\lambda^2}{\mu^2} p_0$

$p_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \cdot p_0$

Záver: rozdelenie je veľkosť stoch. rozdelenie





Problém opravy:

En - n nepráce \Rightarrow $M-n$ jich práce
 $\mu_n = \mu \quad n=1, \dots, M$
 $M_0 = 0$
 $\lambda_n = (M-n)\lambda \quad n=0, 1, \dots, M-1$
 $\lambda_M = 0$

Svářecí

N - svářecí
 En - práce n práce
 λ_n - En (práce h , $N-n$ je flakna)
 $\lambda_n = (N-n)\lambda \quad n=0, \dots, N-1 \quad \lambda_N = 0$
 $\mu_N = n\mu$
 $n=0, \dots, N$
 $M_0 = 0$

$$N\lambda_0 p_0 = \mu p_1 \Rightarrow p_1 = N \frac{\lambda}{\mu} p_0$$

$$(\lambda_1 + \mu_1) p_1 - \lambda_0 p_0 = \mu_2 p_2$$

$$(N-1)\lambda p_1 + \mu p_1 - N\lambda p_0 = 2\mu p_2$$

$$2\mu p_2 = \frac{\lambda^2}{\mu} \cdot N(N-1) p_0 +$$

$$\mu \cdot N \cdot \frac{\lambda}{\mu} p_0 -$$

$$N\lambda p_0 = N \cdot (N-1) \frac{\lambda^2}{\mu^2}$$

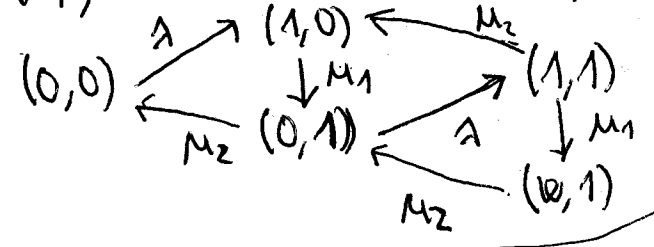
$$= \binom{N}{2} \frac{\lambda^2}{\mu^2} p_0$$

Ekvivalentní systém práce

je tomu podobný
 (takže můžeme kurtit)
 \rightarrow prac. náklady $B_i(-)$
 $\sum_{n=0}^N \binom{N}{n} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot (1)^{N-n} = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} \cdot \left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right)^n$ a pak to už jde.
 \uparrow NORMOU $\Sigma = 1$
 ☺

Kadernictví

2 židle, přijde \rightarrow 1. židle + obsluha
 když židle 2 volná jde na h
 pokud už v židli 1
 když má za sebou dvě židle, jede domů
 λ - intenzita příchodu
 $\mu_i; i=1,2$ - intenzita obsluhy
 Fronta se netvoří



$$P(i,j)(t) = P(\text{v čase } t \text{ je sedl } (i,j))$$

$$P(0,0)(t+h) = P(0,0)(t) (1 - \lambda h + o(h)) +$$

$$P(0,1)(t) (\mu_2 h + o(h)) + o(h)$$

$$\frac{P(0,0)(t+h) - P(0,0)(t)}{h} = - \frac{P(0,0)\lambda \cdot h}{h} + \frac{O(h)}{h} + \frac{P(0,1)\mu_2 h}{h}$$

\uparrow
 více
 židlí
 $\rightarrow 0$

$$P'(0,0)(t) = -P(0,0)(t)\lambda + \mu_2 P(0,1)(t)$$

upre seje zbir \textcircled{C}
dolje namre \Rightarrow celkovni S.

Nas vevitron zapirna chovna v usatere,
tam ti. pro $t \rightarrow \infty$. tam hede usac. wdeker.

To hede tak, ze levo amn polone 0
 $P(i,j)(t)$ mndre hnta pro $t \rightarrow \infty$, $i, j \in P(i,j)$.

Mur phit, ze $\sum_{i,j} P(i,j) = 1$.

$$\lambda P(0,0) = \mu_2 P(0,1) \quad (P'(0,0) \text{ me dli} = 0)$$

$$\mu_1 P_{10} = \lambda P_{00} + \mu_2 P_{11}$$

$$(\lambda + \mu_2) P_{01} = \mu_1 P_{10} + \mu_2 P_{11}$$

$$(\mu_1 + \mu_2) P_{11} = \lambda P_{01}$$

$$\mu_2 P_{11} = \mu_1 P_{11}$$

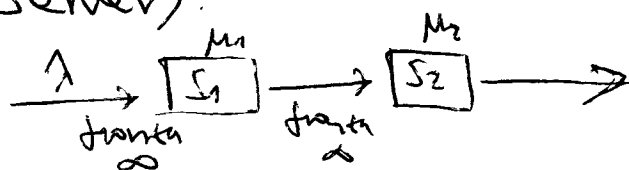
$$P_{00} + P_{01} + P_{10} + P_{11} + P_{11} = 1$$

upetm. - hnti hede explicit- vsem.

stredn- potet zatkentika:

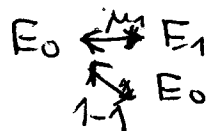
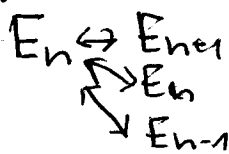
$$0 \cdot P_{00} + 1 \cdot (P_{01} + P_{10}) + 2 \cdot (P_{11} + P_{11})$$

Semery:



hoy ad: $\lambda h + o(h)$ Zpraceni dli 1 kwen a dmer je 2

je obhvez: $\mu_1 h + o(h)$



$$\lambda p_0 = \mu_1 p_1 \Rightarrow p_1 = \frac{\lambda}{\mu_1} p_0$$

$$(\lambda + \mu_1) p_n = \lambda p_{n-1} + \mu_1 p_{n+1}, n \geq 1$$

$$h=1 (\lambda + \mu_1) p_2 = \lambda p_0 + \mu_1 p_2 \Rightarrow p_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^2 p_0$$

$$\Rightarrow p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^n \cdot p_0 \quad \text{Ge}(p = \frac{\lambda}{\mu_1})$$

Stredn- potet adli

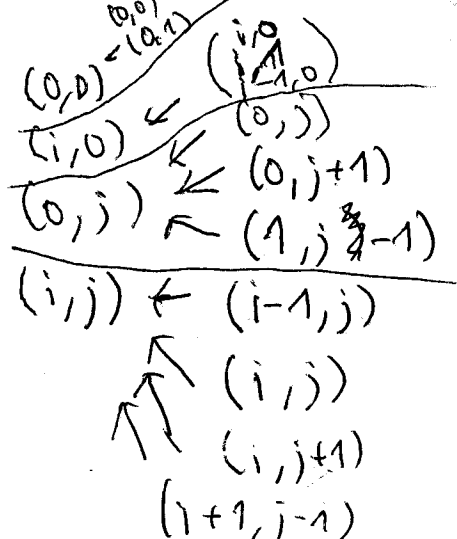
$$p_0 \sum_{h=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^h = 1 \Rightarrow p_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu_1} = q$$

$$EX = \sum_{h=0}^{\infty} h p_h q = q \cdot \frac{1}{1 - p} = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu_1}} = \frac{\lambda}{\mu_1 - \lambda}$$

$$A'(1) = -\frac{q \cdot p}{(1 - p)^2} \Big|_{x=1} = \frac{\lambda p}{q} \nearrow \text{hnti } \infty$$

Smyslupke je kaze $\lambda < \mu_1$.

(TANDEM)
 vster bidee chanterant
 $(i, j) \quad i, j \in \mathbb{N}_0$



(D)

$$\lambda p_{00} = \mu_2 p_{01}$$

$$(\lambda + \mu_1) p_{10} = \lambda p_{00} + \mu_2 p_{11}$$

$$(\lambda + \mu_2) p_{0j} = \mu_1 p_{1j} + \mu_2 p_{0,j+1}$$

$$(\lambda + \mu_1 + \mu_2) p_{ij} = \lambda p_{i-1,j} + \mu_1 p_{i+1,j} + \mu_2 p_{i,j+1} + \mu_2 p_{i,j-1} \quad i, j \geq 1$$

Tento model v hre matice je ozhmerye jako: $\Pi | \Pi | I$

$$P(v \text{ } S_1 \text{ bude n zakaznik}) = \left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_1}\right)$$

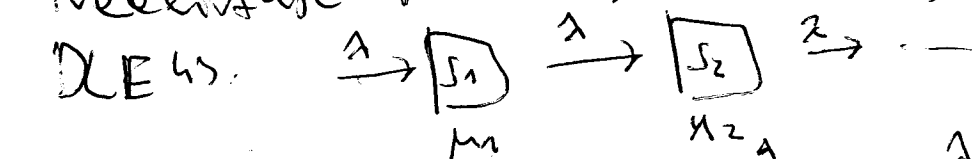
$$P(v \text{ } S_2 \text{ bude m zakaznik}) = \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^m \cdot \left(1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}\right)$$

dz vezdalen

$$P_{n,m} = \left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_1}\right) \cdot \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^m \cdot \left(1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}\right)$$

System kromadne obshy
 $\Pi | \Pi | n \rightarrow$ prst obl. samc
 $\lambda \quad \mu$

Neenstave jednody dikt vob v3



$$E(S_{\text{sys}}) = ES_1 + ES_2 = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} + \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} \Big|_{\mu=\mu_2} = 2 \cdot \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

Nech S_i je kladne

$$\text{var}(S_1, S_2) = \text{var } S_1 + \text{var } S_2 + \dots$$

$\frac{\lambda}{\mu}$ tam byt $\frac{1}{\mu}$ tam kde je \rightarrow jed do
 and

Zajma vst area dle zshy

$$X_1 + \dots + X_n + X_{n+1} \sim \Gamma(n+1, \mu)$$

$$E(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \Gamma(n+1, \mu) \quad (\text{usazen})$$

Vorlesungsinhalt: Hauptresultate für $A(x) = E e^{ix}$

(F)

Speziell: char. f. für $Y(t) = E e^{itx}$

$$p_h = \frac{A^{(h)}(0)}{h!}$$

Konvolution $\sum p_i q_{i-j}$ $\int f(t-x) g(x) dx$