I: Množiny, relace, zobrazení

Axiom výběru: Ke $\forall$ zobrazení f mžiny X **na** mžinu Y $\exists$ zobrazení $g : Y \to X$ tž. $fg = id_Y$.

Zornovo Lemma: $(X,\leq)$ částečně uspořádaná mžina tž. $\forall$ $\leq$–lineárně uspořádánou podmnožina v ní má horní mez. Pak $\forall x \in X$ $\exists y \in X$ maximální tž. $x \leq y$.

- je ekvivalentní s axiomem výběru i Principem Maximality.

Princip Maximality: $\mathcal{A} \subseteq$ Pot.(X) tž. $\forall$ řetěz $C \subseteq \mathcal{A}$ $\exists A \in \mathcal{A}$ tž. $\cup C \subseteq A$. Pak $\forall$ mžinu $A \in \mathcal{A}$ $\exists B$ maximální (vzhledem k inklusi) v $\mathcal{A}$ tž. $A \subseteq B$.

- **Řetěz** je mžina C podmnožin mžiny X, pokud $\forall A,B \in C$ je buď $A \subseteq B$ nebo $B \subseteq A$.
- je ekvivalentní s axiomem výběru i Zornovým lemmatem.

Homomorfismy v relacích: R,S jsou M-arni relace na mžinách X, Y. Zobrazeni $f : X \to Y$ nazyvame **homomorfismem** vzhledem k R, S (a casto piseme $f : (X,R) \to (Y, S)$) pokud: $\forall \xi \in R$, $f \cdot \xi \in S$.

- Izomorfismus: $f : X \to Y$ je izomorfismus je-li vzájemně jednoznačné(bijekce) a $\forall \xi : M \to X$: $f \cdot \xi \in S \Leftrightarrow \xi \in R$

1. Identicke zobrazení id_X : $(X,R) \to (X,R)$ je isomorfismus.**<u>DK:</u>** z def
2. Jsou-li $f : (X,R) \to (Y,R')$ a $g : (Y,R') \to (Z,R'')$ homomorfismy je slozene zobrazení $gf : (X,R) \to (Z,R'')$ homomorfismus.**<u>DK:</u>** Je-li $\xi \in R$ je $f\xi \in R'$ a tedy $(gf)\xi = g(f\xi) \in R''$.
    - (to samé pro relační systémy) Třídu všech objektu a homomorfismu mezi nimi znacime Rel(Δ).

Finitární typ: <u>Typem</u> rozumíme soubor $\Delta = (\Delta_t)_{t \in T}$. Je <u>konečný</u>, jsou-li T a všechny Δ_t konečné množiny, a je <u>finitární</u>, jsou-li Δ_t konečné (o T nepředpokládáme nic).

Součiny relačních systemů(obj., struktur): Buď (X_i,R_i), $i \in J$, soubor objektů z Rel($(\Delta_t)_{t \in T}$). Na kartézském součinu $X = \Pi_{i \in J} X_i$ (s projekcemi $p_j : \Pi_i X_i \to X_j$) def. relační systém R typu $(\Delta_t)_{t \in T}$ předpisem $(\xi : \Delta_t \to X) \in R_t \Leftrightarrow \forall i \in J$, $p_i \xi \in R_{i\,t}$. Získaný objekt (X,R) nazýváme součinem(produktem) souboru (X_i,R_i), $i \in J$ a označujeme $\Pi_{i \in J}(X_i,R_i)$. (str. 23)

- Je uzavřený na podalgebry a homomorfismy.
- (1) Vsechny projekce jsou homomorfismy. (2) R je nejvetsi relacni system tž. všechny projekce jsou (ještě) homomorfismy.
- „<u>O koštěti homomorfismu</u>“: Buď (X_i,R_i), $i \in J$, soubor relacnich objektu typu $\Delta = (\Delta_t)_{t \in T}$. Bud $f_i : (Y, S) \to (X_i,R_i)$, $i \in J$, soubor homomorfismu. Potom $\exists!$ homomorfismus $f : (Y, S) \to \Pi_i (X_i,R_i)$ tž. $\forall i \in J$ je $p_i f = f_i$. **<u>DK:</u>** Podle 3.6.1 $\exists!$ takové zobrazení f. Jde tedy jen o to dokazat, ze f je homomorfismus. Bud $\xi \in S_t$. Potom, jelikoz vsechna f_i jsou homomorfismy, musi $\forall i \in J$ byt $f_i \xi \in R_i$, t.j. $p_i(f\xi) \in R_i$ Tedy je $f\xi \in R$
    - **(3.6.1)** $\forall$soustavu zobrazení f_i: $Y \to X_j$, $i \in J$, $\exists!$ jedno zobrazení f: $Y \to \Pi_{i \in J} X_i$ takové, že $\forall i$ $p_i \cdot f = f_i$

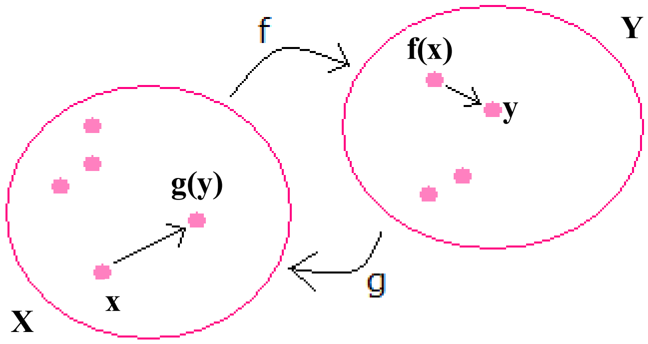
II: Uspořádání

(Částečné) uspořádání: (reflexivita)$\forall x$: xRx, (transitivita) xRy & yRz $\Rightarrow$ xRz, (antisim) xRy & yRx $\Rightarrow$ x=y

Lineární uspořádání (řetěz): (lin) $\forall$ x,y je buď xRy nebo yRx

Antitonní zobrazení: když platí $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ **Isotonní zobrazení**: když platí $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

Galoisova adjunkce (konexe): Isotonní zobrazení $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ jsou adjungována, (f je levý adjunkt zobrazení g, g je pravý adjunkt zobrazení f) jestliže platí: $\forall x \in X, y \in Y$: $f(x) \leq y \Leftrightarrow x \leq g(y)$.



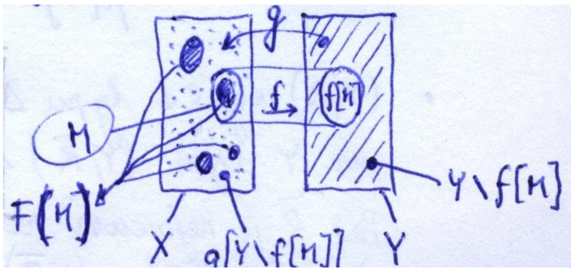
- <u>Levý(pravý) adjunkt (pokud existuje) je určen jednoznačně.</u> **<u>DK:</u>** Je-li $f_i(x) \leq y \Leftrightarrow x \leq g(y)$, i=1,2 je $f_1(x) \leq y$, $f_2(x) \leq y$
- Isotonni zobrazeni f: $X \to Y$ a g: $Y \to X$ jsou adjungovana (f nalevo, g napravo) prave kdyz plati $f(g(y)) \leq y$ a $x \geq g(f(x))$ (symbolicky $fg \leq id$ a $gf \geq id$)
- <u>Důsledek</u> Jsou-li isotonni zobrazeni f,g adjungovana, plati $fgf = f$ a $gfg = g$
- <u>Levé Galoisovy adjunkty zachovávají suprema, a pravé zachovávají infima</u>. **<u>DK:</u>** provedeme pro suprema.

Nechť $s = \sup M$ existuje. Potom je (podle **(2.5)** *f isot.$\Rightarrow \sup f[M] \leq f(\sup M)$*) především $f(s)$ horní mezí množiny $f[M]$. Je-li x horní mez množiny $f[M]$ máme, $\forall m \in M$, $f(m) \leq x$ a tedy $m \leq g(x)$. Je tedy $g(x)$ horní mez množiny M, odtud $s \leq g(x)$ a konečně $f(s) \leq x$.

- <u>Jsou-li X, Y úplné svazy, je isotonní zobrazení $f : X \to Y$ levý (resp. pravý) adjunkt právě když zachovává všechna suprema (resp. infima)</u>. **<u>DK:</u>** Nechť f zachovává suprema. Definujme zobrazení $g : Y \to X$ předpisem $g(y) = \sup\{x \mid f(x) \leq y\}$. Triviálně $f(x) \leq y$ implikuje $x \leq g(y)$. Ale též naopak, je-li $x \leq g(y) = \sup\{z \mid f(z) \leq y\}$, dostáváme $f(x) \leq \sup\{f(z) \mid f(z) \leq y\} \leq y$.

Pevný bod: $f : X \to X$, f má pevný bod y $\Leftrightarrow \exists y \in X$: $f(y) = y$.

- **Bourbakiho věta**: Nechť v $(X,\leq)$ $\exists$ nejmenší prvek a nechť tam má každý řetězec $x1 \leq ...\leq xn \leq...$ supremum. Nechť $f : X \to X$ zach. tato suprema. Pak f má pevný bod a mezi pevnými body $\exists$ nejmenší.
- **Tarského-Knasterova věta (o pevném bodě)**: Každé isotonní zobrazení úplného svazu do sebe má pevný bod. **<u>DK:</u>** L úplný svaz, $f: L \to L$ isotonní, $M = \{x \mid x \leq f(x)\}$ a $s = \sup M$. Pro $x \in M$ je $x \leq s \Rightarrow x \leq f(x) \leq f(s) \Rightarrow$ $f(s)$ je horní mez množiny M a máme $s \leq f(s)$, a z isotonie $f(s) \leq f(f(s)) \Rightarrow f(s) \in M \Rightarrow f(s) \leq s \Rightarrow f(s) = s$.
- **Cantor-Bernsteinova věta (aplikace)**: $f: X \to Y$, $g: Y \to X$ prostá zobrazení, pak $\exists$ vzáj.jednoznačné zobrazení(bijekce) $h: X \to Y$ a lze ho najít tž. $\forall$bod je h(x) def. buď ve shodě s f nebo inversně s g. **<u>DK:</u>** F: $Pot(X) \to Pot(X)$ def. $F(M) = X \setminus g[Y \setminus f[M]]$ a vezmeme A nektery jeho pevny bod (množinu). Podle TK věty existuje (Pot(X) je úplný svaz). Tedy $A=F[A]$ mame tedy $A=X \setminus g[Y \setminus f[A]]$, to jest $X \setminus A = g[Y \setminus f[A]]$.(*)



Polozme $h(x) =$ ($f(x)$ pro $x \in A$ a $g^{-1}(x)$ pro $x \notin A$) (podle (*) ma takove $g^{-1}(x)$ pro $x \notin A$ smysl, samozrejme jednoznacny). Jelikoz g je prosté, mame podle (*), $g^{-1}[X \setminus A] = g^{-1}g[Y \setminus f[A]] = Y \setminus f[A]$ takze pro $x \in A$ a $y \in X \setminus A$ je $h(x) \neq h(y)$; pro $x \neq y$ a $x, y \in A$ nebo $x, y \notin A$ je $h(x) \neq h(y)$ trivialne. <u>Tedy je h proste.</u> Pro $y \in Y$ je bud $y \in f[A]$ a pak je h-obrazem prvku z A, nebo je $y \in Y \setminus f[A]$ a potom je $y = h(g(y))$. <u>Zobrazení h je tedy na.</u>

Relace hluboko pod: x je hluboko pod y v $(X,\leq)$ a píšeme $x \ll y$ jestliže $\forall$usměrněnou($\forall$x,y obs.jejich horní mez) $D \subseteq X$ platí: $y \leq \sup D \Rightarrow \exists d \in D$, $x \leq d$

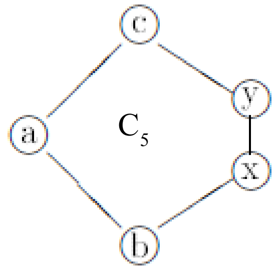
III: Svazy jako algebry

Svaz: Je-li uspořádaná množina zároveň dolní a horní polosvaz, řekneme, že je to svaz. Řekneme, že uspořádaná množina $(X,\leq)$ je **dolní**(resp.**horní**) **polosvaz** jestliže pro libovolné $x,y \in X$ existuje $\inf\{x,y\}$(resp.$\sup\{x,y\}$)

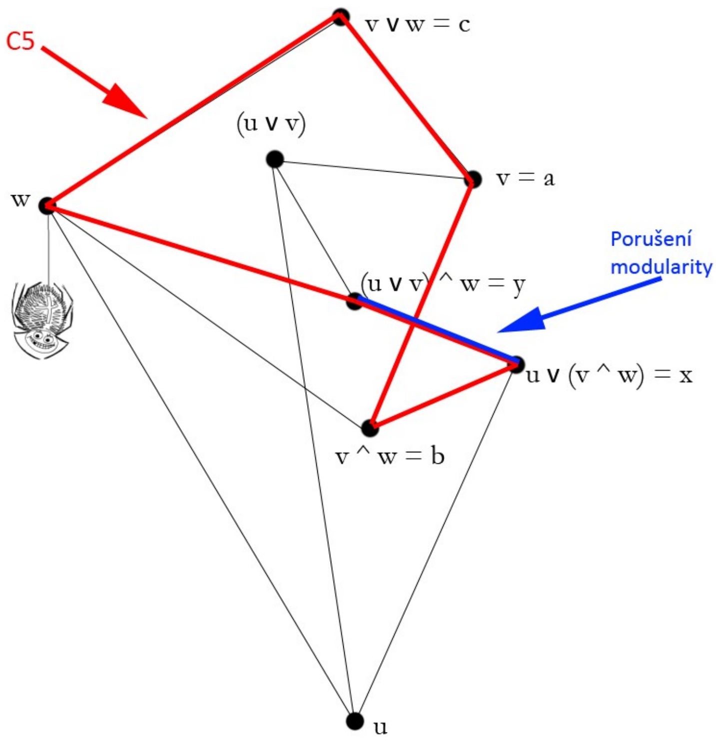
- **Úplný svaz** je uspořádaná množina v níž každá podmnožina má supremum a infimum

Svaz pomocí operace $\wedge$ (svaz jako algebra) : Je-li X svaz, máme kromě operace $\vee$ další operaci $\wedge$ splňující rovnice **($\wedge$-eq)**: $a\wedge(b\wedge c) = (a\wedge b)\wedge c$, $a \wedge b = b \wedge a$, $a \wedge a = a$ (to same plati pro$\vee$). A operace $\wedge$ $\vee$ jsou svázány rovnicemi a $\wedge (a \vee b) = a$, $a \vee (a \wedge b)=a$.

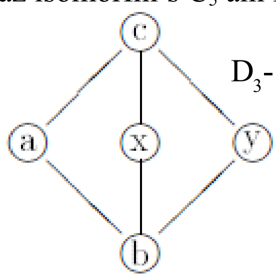
- Necht je na množ. X dána bin.operace $\wedge$ splnující rovnice ($\wedge$-eq). Potom existuje prave jedno usporadaní v nemž je $a \wedge b = \inf\{a,b\}$. Takto usporadana mnozina X je polosvaz s 1 $\Leftrightarrow$ v nem existuje prvek 1 splnující rovnici $1 \wedge a = a$. **<u>DK:</u>** Takove usporadaní je nejvys jedno, protože musí být $x\leq y \Leftrightarrow x = \inf\{x, y\}$. Definujme tedy $x\leq y \equiv x\wedge y=x$. Tato relace je usporadaní: $x\leq x$ protoze $x \wedge x = x$; je-li $x\leq y\leq z$ mame $x \wedge y = x$ a $y \wedge z = y$ a tedy $x \wedge z = (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z) = x \wedge y = x$ a tedy $x\leq z$; konecne je-li $x\leq y\leq x$ je $x = x \wedge y = y \wedge x = y$. V tomto usporadaní je $x \wedge y = \inf\{x,y\}$: predevsím je to dolní mez mnoziny $\{x,y\}$, protoze $(x\wedge y)\wedge x=(x\wedge x)\wedge y = x\wedge y$ a jeste bezprostredneji $(x \wedge y) \wedge y = x \wedge y$; je z dolních mezí nejvetsí, protoze je-li $z\wedge x =z= z\wedge y$ mame $z \wedge (x \wedge y) = (z \wedge x) \wedge y = z \wedge y = z$ a tedy z $x \wedge y$. Je-li $1\wedge a=a$ je v nasí definici $a\leq 1$.
- **Modularni svaz** je, plati-li v nem: $a \leq c \Rightarrow a\vee (b\wedge c) = (a\vee b)\wedge c$
- <u>Svaz L je modularní prave kdyz neobsahuje podsvaz isomorfní se svazem C5.</u> **<u>DK:</u>** ♦Nechť L obsahuje C_5. Potom (pismenka z obrazku) je $x \vee (a \wedge y) = x \vee b = x < y = c \wedge y = (x \vee a) \wedge y$ trebaze $x \leq y$. Tedy L není modularní.



♦Nechť L není modularní. Tedy existují u,v,w tak, ze $u \leq w$ a $u\vee (v\wedge w) < (u\vee v)\wedge w$. Potom v nemuze byt srovnatelne s $u\vee (v \wedge w)$ ani s $(u\vee v) \wedge w$ (kdyby bylo $v \leq (u \vee v) \wedge w$ bylo by $v \leq w$ a $u\vee (v\wedge w) = (u\vee v) \wedge w = u\vee v$; kdyby bylo $v \geq u\vee (v\wedge w)$, bylo by $v \geq u$ a tedy $u \vee (v \wedge w) = (u\vee v) \wedge w = v \wedge w$).
Mame $v \wedge (u \vee (v \wedge w)) = v\vee u$ a jelikoz jeste $(u\vee v) \wedge w \leq v \vee u$, je tez $v\vee u \geq v\vee ((u\vee v)\wedge w)$. Podobne $v\wedge(u\vee (v \wedge w) = v \wedge (u\vee v)\wedge w = v\wedge w$. V L tedy dostaneme kopii C_5 polozíme-li $a=v$, $b=v\wedge w$, $c=v\vee w$, $x=u\vee (v \wedge w)$ a $y=(u\vee v)\wedge w$.



- **Distributivní svaz** je, platí-li v nem: $a \wedge (b\vee c) = (a \wedge b)\vee (a \wedge c)$ nebo také $a\vee (b\wedge c) = (a\vee b)\wedge(a\vee c)$
  DK: $(a\vee b)\wedge(a\vee c) = \underbrace{(a\wedge(a\vee c))}_{a}\vee(b\wedge(a\vee c)) = \underbrace{a\vee(b\wedge a)}_{a}\vee(b\wedge c) = a\vee(b\wedge c)$
- Svaz distributivni ⇔ neobsahuje podsvaz isomorfni s C_5 ani D_3.

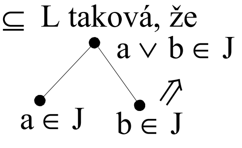


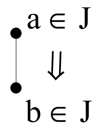
D_3- čínská lampička :)

- Svaz L je distributivni ⇔ kazda soustava rovnic tvaru $a \wedge x = b$ a $\vee x = c$ ma nejvys jedno řešení. **DK:** ♦ Necht je L distributivni a necht $a \wedge x = b$, $a \vee x = c$, $a \wedge y = b$ a $a \vee y = c$. Potom $x = x \wedge (a \vee x) = x \wedge (a \vee y) = (x \wedge a) \vee (x \wedge y) = (y \wedge a) \vee (x \wedge y) = y \wedge (a\vee x) = y \wedge (a\vee y) = y$. ♦Necht L neni distributivní. Potom v kterekoli z konfigurací C5 nebo D3 jsou x i y resení naší soustavy rovnic.

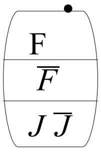
Ideály a filtry (v distributivních svazech):

- **Ideál** v distributivním svazu L s nulou a jednotkou je podmnožina $J \subseteq L$ taková, že
  - $0 \in J$,
  - $a, b \in J \Rightarrow a \vee b \in J$,
  - $b \leq a$ & $a \in J \Rightarrow b \in J$.





- **Filtr** v L je definován jako podmnožina $F \subseteq L$ taková, že
  (f1) $1 \in F$,
  (f2) $a, b \in F \Rightarrow a \wedge b \in F$,
  (f3) $b \geq a \;\&\; a \in F \Rightarrow b \in F$.
- **Vlastní ideál** J resp. filtr F - jestliže to není celý svaz L, tedy $1 \notin J$ resp. $0 \notin F$
- **Prvoideál** resp. **prvofiltr** je vlastní ideál J resp. filtr F takový, že
  - kdykoli $a \wedge b \in J$, máme $a \in J$ nebo $b \in J$
  - resp. kdykoli $a \vee b \in F$, máme $a \in F$ nebo $b \in F$.
- **Maximální ideál** J resp. filtr F – není obsažen v žádném větším vlastním
- Doplňek prvoideálu je prvofiltr a naopak. Ale doplňek ideálu nemusí být filtr a naopak. (podle šešitu)
- Každý vlastní ideál je možno rozšířit na maximální ideál. **DK:** Dostaneme standardním pouzitím Zornova lemmatu (sjednocení system vlastních idealu lineárně uspořádanych inklusí je vlastní ideal jednotka nebyla v žádném sčítanci).
- Každý maximalni ideal je prvoideal (opačně to obecně neplatí, jen u okruhů). **DK:** Bud J max. a $ab \in J$. Předpokladejme, ze $a \notin J$. Def. $K=\{x \mid xb \in J\}$. K je zrejme ideal a $J \subset K$, takze musi byt $1 \in K$ a tedy $b = 1b \in J$.
- **Birkhoffovo lemma**: J je ideal, F filtr v L a $J \cap F = \emptyset$. Pak $\exists$ filtr $\overline{F} \supseteq F$ maximální vzhledem k podmince $\overline{F} \cap J = \emptyset$ a $\overline{F}$ je prvofiltr.**DK:** Mějme soustavu filtrů $\mathcal{F} \supseteq F$ a $\mathcal{F} \cap J = \emptyset$, tž. $\forall F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ je buď $F_1 \subseteq F_2$ nebo $F_2 \subseteq F_1$. Pak $\cup\mathcal{F}$ je filtr, stale jeste disjunktní s J. Podle Principu maximality tedy $\exists$ maximální filtr $\overline{F}$. Dokážeme, že je prvofiltr: ♦Předp.: $\forall a,b \notin \overline{F}$ a $a \vee b \in \overline{F}$. Def. $G=\{x \mid x \vee b \in \overline{F}\}$. Je-li x, $y \in G$ máme $(x \wedge y) \vee b =_{(\text{distr.})} (x \vee b) \wedge (y \vee b) \in_{(f2)} \overline{F}$ a tedy $x \wedge y \in_{(f2 \text{ pro } G)} G$, je-li $z \geq x$ pak $z \vee b \geq x \vee b \in \overline{F}$ a tedy $z \in G$. Tedy je G filtr a jelikož zřejmě $G \supseteq \overline{F}$ a $G \ni a \notin \overline{F}$, je to filtr ostře větší než $\overline{F}$ a tedy již nemůže být disjunktní s J. Zvolme $c1 \in G \cap J$ (tedy specialne $c1 \vee b \in \overline{F}$) a definujme $H = \{x \mid x \vee c1 \in \overline{F}\}$. H je filtr, ostře větší než $\overline{F}$ $\Leftarrow$ obsahuje b. Musí tedy jiz obsahovat nejaky $c2 \in J$. To je ale SPOR, meli bychom $c1 \vee c2 \in J \cap \overline{F}$ (str.53)



- **Birkhoffova věta**: Necht J je ideal a F filtr v L a necht platí $J \cap F = \emptyset$. Potom $\exists$ prvofiltr $\overline{F} \supseteq F$ a prvoideál $\overline{J} \supseteq J$ tž. $\overline{J} \cap \overline{F} = \emptyset$ **DK:** Z lemmatu: $J \cap F = \emptyset$ $\Rightarrow \exists$ prvofiltr max. $\overline{F} \supseteq F$ vzhledem k $\overline{F} \cap J = \emptyset$ duální podoba lemmatu(otočíme svaz): $J \cap F = \emptyset$ $\Rightarrow \exists$ prvoideál max. $\overline{J} \supseteq J$ vzhledem k $\overline{J} \cap F = \emptyset$ a tedy $\overline{J} \cap \overline{F} = \emptyset$

Pseudokomplementy a komplementy: Buď L svaz s nulou, $a \in L$. Největší element x takový, že $x \wedge a = 0$, pokud existuje (např.v D3 není), nazýváme pseudokomplementem prvku a a označujeme a^*. Def: $x \leq a^* \Leftrightarrow x \wedge a=0$ Pseudok.svaz obsahuje 0 a 1 a $\forall$prvek má pseudokomplement. Zobrazení $f(a)=a^*$ pseudok.svazu do sebe je antitonní. Prvek b nazveme komplementem prvku a ve svazu L, platí-li $a \wedge b=0$ a $a \vee b=1$. Komplement nemusí existovat. A ani nemusí být jednoznačně určen (např. ve svazu D3). Platí:

1. $a \leq a^{**}$ Dk: z def: $a \wedge a^* = 0 \Rightarrow a \leq (a^*)^*$
2. $a^* = a^{***}$ Dk: z 1 $a^* \leq (a^*)^{**}$, z 1 a antitonie $a^* \geq (a^*)^{**}$
3. $a \wedge b = 0 \Leftrightarrow a^{**} \wedge b = 0$ Dk: z 2: $a \wedge b = 0 \Leftrightarrow b \leq a^* \Leftrightarrow b \leq (a^{**})^* \Leftrightarrow a^{**} \wedge b = 0$.
4. $(a \vee a^*)^* = 0$ Dk: $x \wedge (a \vee a^*) = 0 \Leftrightarrow x \wedge a = 0$ a $x \wedge a^* = 0$, t.j. $x \leq a^*$ a $x \leq a^{**}$, tedy $x \leq a^* \wedge a^{**}=0$.

- V psedok.svazu platí: $(a \wedge b)^{**} = a^{**} \wedge b^{**}$ Dk: Platí $(a \wedge b)^{**} \leq a^{**} \wedge b^{**}$ (2x použijeme antitonní zobrazení na $(a \wedge b) \leq b$ a na $(a \wedge b) \leq a$). Na druhe strane mame podle 1, $a \wedge b \leq (a \wedge b)^{**}$, tedy $a \wedge b \wedge (a \wedge b) = 0$ a podle 3 $a^{**} \wedge b \wedge (a \wedge b) = 0$ a znovu podle 3 $a^{**} \wedge b^{**} \wedge (a \wedge b) = 0$, a konecne $a^{**} \wedge b^{**} \leq (a \wedge b)^{**}$.
- V psedok.svazu platí: $(a \vee a^*)^{**} =1$ Dk: plyne z 4
- Pseudokomplementy nemusí být komplementy, v distr.svazu je $\forall$ komplement pseudokomplement Dk: Je-li b komplement a a $x \wedge a=0$ máme $x=x \wedge (a \vee b)=(x \wedge a) \vee (x \wedge b)=x \wedge b$ a tedy $x \leq b$
- **+ Booleanizace**

Heytingova operace (relativní pseudokomplement): ve svazu je binární operace $a \rightarrow b$ splňující $a \wedge b \leq c \Leftrightarrow a \leq b \rightarrow c$.
Heytingova algebra: Svazu s nulou a jednotkou a Heytingovou operací (to, že má jednotku je ale automatické: jelikož $x \wedge a \leq a$ je vždy $x \leq a \rightarrow a$) říkáme Heytingova algebra.

- Strukturu svazu muzeme rozsirit na Heytingovskou nejvyse jednim zpusobem. **DK:** z def.HA: $(c1 \leq c2) \Rightarrow (b \rightarrow c1 \leq b \rightarrow c2)$ a $(c1 \rightarrow b \leq c2 \rightarrow b)$ $\forall$ pevne b dava formule adjunkci $x \wedge b \leq y \equiv x \leq b \rightarrow y$ mezi zobrazeními $(x \mapsto x \wedge b)$ a $(x \mapsto b \rightarrow y)$ svazu L do sebe. Jelikoz první z techto zobrazení je dáno svazovou strukturou, je jím urceno i druhé, a tím máme určenu i operaci $\rightarrow$.
- Pripousti-li svaz Heytingovu operaci, plati v nem: $(\sup M) \wedge x = \sup\{m \wedge x \mid m \in M\}$ kdykoli supM existuje. HA je vždy distributivní.

- „<u>Význam Galoisovy konexe v HA</u>“: Úplný svaz L pripousti Heytingovu operaci prave kdyz v nem plati zesilena rovnice distributivity: $(\bigvee_{j\in J} a_j) \wedge b = \bigvee_{j\in J}(a_j \wedge b)$ $\forall$ system $\{a_j \mid j \in J\} \subseteq L$ a kazde $b \in L$.
- HA je vzdy pseudokomplementarni (mame totiz $a^* =(a\rightarrow 0)$)

Booleanizace: Buď L Heytingova algebra. Položme $\mathfrak{B}L = \{a \in L \mid a = a^{**}\}$ a definujme zobrazení $\mathbf{b}: L \rightarrow \mathfrak{B}L$ předpisem $\mathbf{b}(a) = a^{**}$ a nazveme ho Booleanizace Heyt.algebry L.

- $\mathfrak{B}L$ je Booleova algebra. Konecna infima v $\mathfrak{B}L$ se shodují s konecnymi infimy v L, a pro suprema platí formule: $\sup_{\mathfrak{B}L} M = (\sup_L M)^{**}$ kdykoli ma prava strana smysl. Je-li tedy L uplny svaz, je i svaz $\mathfrak{B}L$ uplny. Zobrazení b zachovava konecna infima a vsechna existující suprema. Navíc o nem platí implikace $\mathbf{b}(a)=0 \Rightarrow a=0$.

Booleova algebra je distributivní svaz takový, že každý prvek v něm má komplement. Komplement prvku a se označuje a^c.

- Kazda Booleova algebra L je Heytingova algebra. Formule $b\rightarrow c=b^c\vee c$ totiz dava Heytingovu operaci v L.

Ultrafiltry: prvofiltry v Booleových algebrách (jsou vždy maximální).

- Bud F vlastni filtr v Booleove algebre L. Potom: (1) F je maximalni fltr $\Leftrightarrow$ (2) F je prvofiltr $\Leftrightarrow$ (3) $\forall a\in L$ je bud $a\in F$ nebo $a^c\in F$.

IV: Univerzální algebry

Homomorfismy algeber: Zobrazení $f : X \rightarrow Y$ nazýváme homomorfismem vzhledem k operacím $\alpha : X^M \rightarrow X$, $\beta: Y^M \rightarrow Y$, platí-li pro každé $\zeta : M \rightarrow X$ <u>$f(\alpha(\zeta)) = \beta(f \cdot \zeta)$</u>, což možná není úplně průzračná formule. Podívejme se ale co říká ve finitárním případě: <u>$f(\alpha(x1, \ldots, xn)) = \beta(f(x1), \ldots, f(xn))$</u>, což je jistě jasnější.

System vsech algeber typu Δ a vsech jejich homomorfismu budeme oznacovat **Alg(Δ)**

- Budte $A = (X, \alpha)$, $B = (Y, \beta)$ (kde $\alpha=(\alpha_i)i\in J$) algebry stejneho typu $\Delta = (\Delta_t)_{t\in T}$. Zobrazeni $f : X \rightarrow Y$ je homomorfismus $A \rightarrow B$ je-li $\forall i\in J$ homomorfismem vzhledem k α_i, β_i.
- Buďte α,β,γ po řadě M-ární operace na množinách X,Y,Z. Buď $f: X\rightarrow Y$ prosté zobrazení, $g: Z\rightarrow Y$ libovolné zobrazení a $h: Z\rightarrow X$ zobrazení takové, že $f\cdot h = g$. Jsou-li f a g homomorfismy, je i h homomorfismus.
- Buďte α,β,γ po řadě M-ární operace na množinách X,Y,Z. Buď $f: X\rightarrow Y$ zobrazení na, $g: X\rightarrow Z$ libovolné zobrazení a $h: Y\rightarrow Z$ zobrazení takové, že $h \cdot f = g$. Jsou-li f a g homomorfismy, je i h homomorfismus.
- Každý homomorfismus který je prostý a na je isomorfismus.

Podalgebry: Buď $A = (X, \alpha)$, $\alpha = (\alpha_t)_{t\in T}$, algebra typu $\Delta = (\Delta_t)_{t\in T}$. Buď Y podmnožina množiny X a $j : Y \subseteq X$ zobrazení vložení. Je-li Y uzavřená na všechny operace α_t, t.j., platí-li $\forall t \in T$ a $\xi : \Delta_t \rightarrow Y$ že $\alpha_t(j\,\xi)$ je v Y, opatříme ji operacemi $(\alpha_t|Y)(\xi) = \alpha_t(j\xi)$ a o takto získané algebře mluvíme jako o podalgebře algebry A.

1. Je-li $B = (Y, \alpha|Y)$ podalgebra algebry $A = (X, \alpha)$ je zobrazení vlození $j: B \rightarrow A$ homomorfismus.
2. Je-li $f: B \rightarrow A$ libovolny homomorfismus je $f[B]$ podalgebra algebry A.
3. Je-li $f: B \rightarrow A$ prosty homomorfismus je jeho restrikce $f': B \rightarrow f[B]$ isomorfismus.

- Prunik libovolneho systemu podalgeber je podalgebra.
- Podle předchozího existuje $\forall M \subseteq X$ algebry $A =(X, \alpha)$ nejmenší podalgebra algebry A ktera mnozinu M obsahuje, totiz prunik vsech podalgeber Y takovych, že $M \subseteq Y$. Budeme o ní mluvit jako o **podalgebře generované množinou** M a oznacovat **Gen(M)**. Říkáme, ze M je soustava generátoru algebry A je-li Gen(M) = A.

Podalgebry (z Algebry I): Je-li $A(\alpha_i \mid i \in I)$ algebra, potom $B \subseteq A$ nazveme podalgebrou (algebry $A(\alpha_i \mid i \in I)$), pokud B je uzavřená na operace α_i $\forall i \in I$.

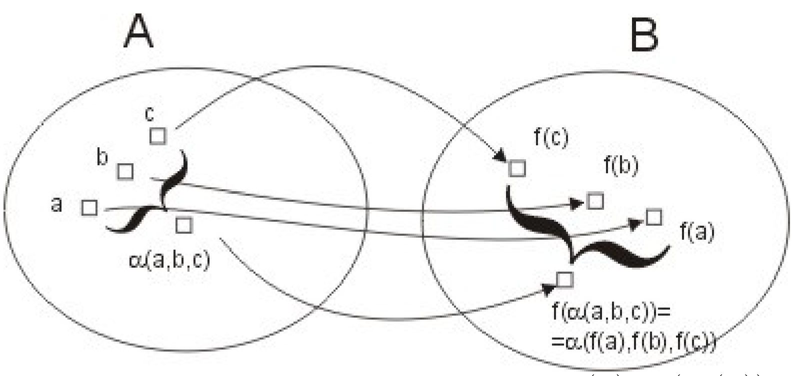
Součiny (product) algeber (str. 74): Buďte $A_i = (X_i,\alpha^i)$, $i \in J$ algebry téhož typu $\Delta = (\Delta_t)_{t\in T}$. Vezměme $X = \Pi_{i\in J} X_i$ a projekce $p_j = ((x_i)_{i\in J} \mapsto x_j) : X \rightarrow X_j$. Na X definujme operace α_t, $t \in T$ předpisy $\alpha_t(\xi) = (\alpha_t^i(p_i\xi))_{i\in J}$ (kde $\xi: \Delta_t\rightarrow X$). Pak algebra $A = (\Pi_{i\in J} X_i, (\alpha_t)_{t\in T})$ je součinem nebo produktem soustavy algeber A_i , $i \in J$ a označujeme $\Pi_{i\in J} A_i$.

Kongruence: Buď $A = (X, \alpha = (\alpha_t)_{t\in T})$ algebra typu $\Delta = (\Delta_t)_{t\in T}$. Relace ekvivalence E na množině X se nazývá kongruencí na A jestliže

($\forall t \in T$, jsou-li ξ , $\eta : \Delta_t \rightarrow X$ takové, že $\forall d \in \Delta_t$ je $\xi(d)E\eta(d)$, platí též $\alpha_t(\xi)E\alpha_t(\eta)$.

Možná trochu průhledněji pro finitární operace: platí-li x_jEy_j pro všechna j, je $\alpha_t(x1, \ldots, xnj)E\alpha_t(y1, \ldots, ynj)$.

- **Faktoralgebra** (faktorová algebra nebo kvocient): E kongruence na algebre $A = (X, \alpha)$. Označme



$q = (x \mapsto xE)$: $X \to X/E$ a na mnozine X/E definujme operace $\bar{\alpha}_t(\xi) = q(\bar{\alpha}_t(\eta))$ kde $q\eta = \xi$ (η: $\Delta_t \to X$ a ξ: $\Delta_t \to X/E$), získanou algebru označíme **A/E**=$(X/E,\ (\bar{\alpha}_t)_{t\in T})$

- <u>Tvrzení</u>
  - 1. q je homomorfismus A na A/E.
  - 2. Kongruence na algebre A jsou prave relace tvaru $E_h = \{(x, y)\ |h(x) = h(y)\}$, kde $h : A \to B$ je homomorfismus do libovolne algebry B.
  - 3. h homomorfismus A na B $\Rightarrow \exists$ isomorsmus $f : B \to A/E_h$ takovy, ze $fh = q$.
- Budte E_i, $i \in J$ kongruence na algebre A. Ozn. $E = \bigcap_{i\in J} E_i$. Pak je A/E isomorfni s podalg. součinu $\prod_{i\in J} A/E_i$.
- Bud $h : (X, \alpha) \to (Y, \beta)$ homomorfismus na, bud $j : C \subseteq B$ vlozeni podalgebry. Potom $A' = h^{-1}[C]$ je podalgebra algebry A a restrikce h': $A' \to C$ homomorfismu h je homomorfismus na. Nasledkem toho je podalgebra faktorove algebry vzdy isomorfni s faktorovou algebrou podalgebry.

Volná algebra nad mžinou M vzhledem k třídě algeber $\mathcal{A}$ je algebra **F(M)**$\in \mathcal{A}$ spolu se zobrazením $\phi_M : M \to F(M)$ tž. $\forall$ algebru $A\in\mathcal{A}$ a $\forall$ zobrazení $f : M \to A$ $\exists!$ homomorfismus $h : F(M) \to A$ tž. $h \cdot \phi_M = f$.

$$\begin{tikzcd} F(M) \arrow[r, "\exists!h"] & \forall A \in \mathcal{A} \\ M \arrow[u, "\phi_M"] \arrow[ur, dashed, "\forall f"'] & \end{tikzcd}$$

- Buď $\Delta = (n_t)_{t\in T}$ finitární typ a buď $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Alg}(\Delta)$ netriviální třída algeber uzavřená na tvoření součinů, podalgebry a isomorfismy. Pak $\forall$ mžinu M $\exists$volná algebra nad M vzhledem k $\mathcal{A}$.

  <u>**DK:**</u> Zvolme systém $R \subseteq \mathcal{A}$ takový, že v něm $\exists$izomorfní algebra $\forall A\in\mathcal{A}$ generovanou $\le |M|$ prvkami. Označme $U=\{u \mid u: M \to B_u \in R \text{ lib.zobrazení}\}$ a součin $p_v : \prod_{u\in U} B_u \to B_v$, potom $\exists!$ prosté zobrazení ψ: $M \to \prod_{u\in U} B_u$ dané podmínkou $p_v\psi = v\ \forall v: M \to B_v$. Konečně definujme $\phi_M : M \to F(M) = \mathrm{Gen}(\psi[M])$ předpisem $\phi_M(x) = \psi(x)$. Označíme-li ι homomorfismus vložení $F(M) = \mathrm{Gen}(\psi[M])$ do $\prod_{u\in U} B_u$, máme $\iota\,\phi_M = \psi$. Buď lib. $A\in\mathcal{A}$ a f: $M \to A$ lib.zobrazení. Rozložme f na zobrazení $M \xrightarrow{g} \mathrm{Gen}(f[M]) \xrightarrow{j\,=\,\subseteq} A$. Podle volby množiny R $\exists$ isomorfismus ε: $\mathrm{Gen}(f[M]) \to B_v \in R$. Položme $v=\varepsilon g$ a $h = j\varepsilon^{-1}p_v\phi_M$.

$$\begin{tikzcd} \prod_{u\in U} \mathbf{B_u} \arrow[dr, "\mathbf{p_v}"'] & \mathbf{M} \arrow[l, "\exists!\psi"'] \arrow[d, "p_V\psi = \mathbf{v}"] \\ & \mathbf{B_v} \in R \end{tikzcd}$$

(červeně jsou homomorfismy)

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{F(M)} = \mathrm{Gen}(\psi[M]) \arrow[dl, "\iota\,=\,\subseteq"'] \arrow[rr, "\mathbf{h} = j\varepsilon^{-1}p_v\iota"] & & A\in\mathcal{A} \\ \prod_{u\in U} \mathbf{B_u} \arrow[dr, "\mathbf{p_v}"'] & \mathbf{M} \arrow[l, "\exists!\psi"'] \arrow[u, "\phi_M"] \arrow[urr, dashed, "\mathbf{f}"] \arrow[rr, "\mathbf{g}"] \arrow[d, "p_V\psi = \mathbf{v} = \varepsilon g"] & & \mathbf{Gen(f[M])} \arrow[u, "\mathbf{j} = \subseteq"'] \arrow[dll, bend left, "\varepsilon"] \\ & \mathbf{B_v} \in R \arrow[urr, bend right, "\varepsilon^{-1}"'] & & \end{tikzcd}$$

Potom: $h\phi_M = j\varepsilon^{-1}p_v\iota\phi_M = j\varepsilon^{-1}p_v\psi = j\varepsilon^{-1}v = j\varepsilon^{-1}\varepsilon g = jg = f$

$\exists!$h podle **(3.5)** *M je soustava generátorů algebry A a schodují-li se homom. f,g:A→B na M, platí f=g*

Variety algeber: Třídy algeber tvaru $\boldsymbol{\mathcal{M}}_M$**(E)** nazýváme varietami algeber nebo primitivními třídami algeber (typu Δ). Buď M množina a E libovolná podmnožina produktu $F(M)\times F(M)$.

Definujme $\boldsymbol{\mathcal{M}}_M$**(E)** $= \{A \mid \forall \text{ homom. } h: F(M) \to A,\ \forall (u, v) \in E,\ h(u) = h(v)\}$.

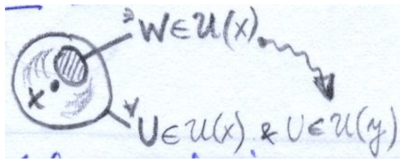
operator $E_M(\mathcal{A}) = \{(u,v) \in F(M)\times F(M) \mid \forall \text{ homom. } h: F(M) \to A\in\mathcal{A},\ h(u) = h(v)\}$.

- **Birkhoffova věta o varietách** Třída algeber $\mathcal{A}\subseteq\mathrm{Alg}(\Delta)$ je varieta prave kdyz je uzavrena na isomorfismy, podalgebry, produkty a faktorove algebry. **DK:** na 1

V: Topologie

Topologie:

- **Topologický prostor** je množina na které je definována topologie jedním z těchto způsobů:
- Řekneme, že na množině X je definována **topologie pomocí okolí** je-li $\forall x \in X$ určena neprázdná množina $U(x) \subseteq \exp X$ (potenční množina) taková, že



  - (ok1) $\forall U \in U(x)$, $x \in U$,
  - (ok2) $U, V \in U(x) \Rightarrow U \cap V \in U(x)$,
  - (ok3) $U \in U(x)$ & $U \subseteq V \Rightarrow V \in U(x)$,
  - (ok4) $\forall U \in U(x)\ \exists W \in U(x)$, $W \subseteq U$, takové, že $\forall y \in W$ je $U \in U(y)$.
- Řekneme, že na množině X je definována **topologie pomocí otevřených množin** je-li dána množina $\tau \subseteq \exp X$ taková, že
  - (ot1) $\emptyset, X \in \tau$,
  - (ot2) $U, V \in \tau \Rightarrow U \cap V \in \tau$,
  - (ot3) $U_i \in \tau$, $i \in J \Rightarrow \cup_{i\in J} U_i \in \tau$.

  Prvkům $U \in \tau$ říkáme otevřené množiny.
- **Base** topologie τ (zadané jako soustava otevřených množin) je libovolná $\beta \subseteq \tau$ taková, že $\forall U \in \tau$, $U = \cup\{B \in \beta \mid B \subseteq U\}$.
- **Subbase** topologie τ je libovolná $S \subseteq \tau$ taková, že množina všech konečných průniků prvků S je basí τ .

Uzavřené množiny: Mějme topologii na X dánu jako soustavu otevřených množin. Řekneme, že podmnožina $A \subseteq X$ je uzavřená, je-li $X \setminus A$ otevřená. Z DeMorganových pravidel okamžitě dostáváme, že sjednocení konečného počtu a průnik libovolného systému uzavřených množin je uzavřená množina.

Uzávěr ($\equiv \overline{M}$): Je-li $M \subseteq (X,\tau)$ definujeme uzávěr množiny M jako $\overline{M} = \cap\{A \mid A \text{ uzavřená}, M \subseteq A\}$.

Spojitost (5 ekvivalentních definic):

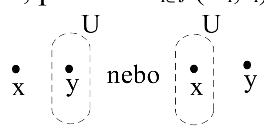
- **Spojité zobrazení**: Zobrazení $f : X \to Y$ je spojité zobrazení $(X,\tau) \to (Y, \theta)$ jestliže ke $\forall x \in X$ a $\forall$ okolí V bodu f(x) v topologii θ $\exists$okolí U bodu x v topologii τ tž. $f[U] \subseteq V$.
- Buď f zobrazení $X = (X,\tau)$ do $Y = (Y, \theta)$. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní.
  - (1) f je spojité.
  - (2) $\forall U$ otevřenou v Y je $f^{-1}[U]$ otevřená v X.
  - (3) $\forall A$ uzavřenou v Y je $f^{-1}[A]$ uzavřená v X.
  - (4) $\forall M \subseteq X$ je $f[\overline{M}] \subseteq \overline{f[M]}$
  - (5) $\forall M \subseteq Y$ je $\overline{f^{-1}[M]} \subseteq f^{-1}[\overline{M}]$

  DK: (1)⇒(2): Je-li $x \in f^{-1}[U]$ je $f(x) \in U$ a U je jeho okolí, takze pro nejake okolí V bodu x je $f[V] \subseteq U$ a mame $x \in V \subseteq f^{-1}f[V] \subseteq f^{-1}[U]$ a $f^{-1}[U]$ je okolí x. (2)⇔(3): protoze vzorova funkce ($M \mapsto f^{-1}[M]$) zachovává doplňky. (3)⇒(4): $M \subseteq f^{-1} f[M] \subseteq f^{-1}[\overline{f[M]}]$ a jelikoz poslední mžina je uzavřená, $\overline{M} \subseteq f^{-1}[\overline{f[M]}]$ a konečně $f[\overline{M}] \subseteq \overline{f[M]}$. (4)⇒(5) Plyne okamzite z toho, že $f[\overline{f^{-1}[M]}] \subseteq \overline{ff^{-1}[M]} \subseteq \overline{M}$. (5)⇒(1) Je-li $f(x) \notin \overline{Y \setminus V}$ je $x \notin f^{-1}[\overline{Y \setminus V}]$ a tedy $x \notin \overline{f^{-1}[Y \setminus V]} = \overline{X \setminus f^{-1}[V]}$. Polozme $U = f^{-1}[V]$.

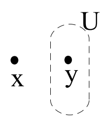
Součiny topologických prostorů: Mějme dán systém (X_i,τ_i), $i \in J$, topologických prostorů. Na kartézském součinu $\Pi_{i\in J} X_i$ definujme topologii τ subbasí $\{p_j^{-1}[U] \mid j \in J, U \in \tau_j\}$, kde $p_j : \Pi_{i\in J} X_i \to X_j$ jsou projekce $(x_i)_{i\in J} \mapsto x_j$. O karézském součinu $\Pi_{i\in J} X_i$ opatřeném touto topologií mluvíme jako o součinu nebo produktu systému (X_i,τ_i), a chceme-li zdůraznit, že se jedná o tento prostor a ne jen o jeho nosnou množinu, píšeme $\Pi_{i\in J} (X_i,\tau_i)$. (str. 102)

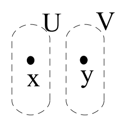
Oddělovací (separační) axiomy Řekneme, že (X,τ) splňuje axiom (Ti) když:

- **(T0)** $\forall x \neq y \in X\ \exists U \in \tau$ tak, že $x \notin U \ni y$ nebo $y \notin U \ni x$



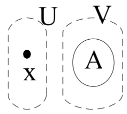
- **(T1)** $\forall x \neq y \in X\ \exists U \in \tau$ tak, že $x \notin U \ni y$



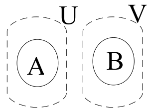


- **(T2) Hausdorffův prostor**: $\forall x \neq y \in X\ \exists U, V \in \tau$ tak, že $x \in U$, $y \in V$ a $U \cap V = \emptyset$
  - <u>V Hausdorffově prostoru X je každá kompaktní podmnožina uzavřená</u> **DK:** $A \subseteq X$ kompaktní, pro $x \notin A$ a $a \in A$ zvolme U_a, V_a otevřené disjunktní tž. $x \in U_a$ a $a \in V_a$. Potom $\{V_a \mid a \in A\}$ je pokrytí množiny A a můžeme z něho vybrat konečné $V_{a1}, \dots , V_{an}$. Položme $U = \cap(i=1..n)\ U_{ai}$. U je okolí bodu x a neprotíná A (pže $U_i \cap V_i = \emptyset\ \forall i$), takže $x \notin \overline{A}$. Tedy $\overline{A} \subseteq A$.

- <u>Každý Hausdorffův kompaktní prostor je normální</u> **<u>DK:</u>** ♦je <u>regulární</u>: $x \notin A$, A uzavřená a tedy kompaktní (každá uz.podmnožina kompaktního prostoru je kompaktní). Pro $a \in A$ zvolme U_a, V_a otevřené disjunktní tž. $x \in U_a$ a $a \in V_a$. Potom $\{V_a \mid a \in A\}$ je pokrytí kompaktní množiny A a můžeme z něho vybrat konečné $V_{a1}, \ldots, V_{an}$ tak, že $A \subseteq V = \cup(i=1..n)\ V_{ai}$. Položme $U = \cap(i=1..n)\ U_{ai}$ a máme $x \in U$ a $U \cap V = \emptyset$. ♦je <u>normální</u>: postup zopakujeme: Pro $b \in B$ zvolíme disjunktní $V_b \ni b$ a $U_b \supseteq A$, vybereme $V_{b1}, \ldots, V_{bn}$ pokrytí B, a položíme $U = \cap(i=1..n)\ U_{bi}$ a $V = \cup(i=1..n)\ V_{bi}$.
- **(T3) Regularita**: $\forall x \in X$ a $\forall A$ uzavřenou, $x \notin A$ $\exists U, V \in \tau$ tak, že $x \in U$, $A \subseteq V$ a $U \cap V = \emptyset$



- **(T3,5) Úplná regularita**: $\forall x \in X$ a $\forall A$ uzavřenou, $x \notin A$ $\exists$ spoj. $\phi : X \to I$ že $\phi(x)=0$ a $\phi[A] \subseteq \{1\}$ ($I=\langle 0, 1\rangle$)
- **(T4) Normalita**: $\forall A,B$ disjunktní uzavřené $\exists$ disj.otevř. $U,V \in \tau$ tž. $A \subseteq U$ a $B \subseteq V$



- **T0 ⇐ T1 ⇐ T2 ⇐ T3&T1 ⇐ T3,5&T1 ⇐ T4&T1**

Ireducibilní prostor $W \in \tau$ jestliže $W \neq X$ a $W=U \cap V$ $U,V \in \tau \Rightarrow W=U$ nebo $W=V$.
Střízlivý prostor - jestliže $\forall$ ireducibilní W $\exists!$ bod x tž. $X = X \setminus \overline{\{x\}}$.
Kompaktnost: Prostor X je kompaktní, dá-li se z každého jeho pokrytí vybrat konečné podpokrytí. Mluvíme o <u>kompaktní podmnožině</u> Y (obecného) prostoru (X,τ) je-li podprostor $(Y,\tau|Y)$ kompaktní (všimněte si, že to znamená přesně to, že z každého pokrytí U podmnožiny Y lze vybrat konečné).

- **Pokrytí** topologického prostoru (X,τ) je podmnožina $U \subseteq \tau$ tž. $\cup U = X$. Je-li U pokrytí X a $V \subseteq U$ podsystém tž. stále ještě $\cup V = X$, mluvíme o **podpokrytí**, nebo o pokrytí vybraném z U.
- **Definice '|'**: Buď (X,τ) topologický prostor a $Y \subseteq X$. Snadno ověříme, že $\tau|Y = \{U \cap Y \mid U \in \tau\}$ tvoří topologii na Y.
- Každá uzavřená podmnožina kompaktního prostoru je kompaktni.
- Obraz kompaktni podmnoziny pri spojitem zobrazeni je kompaktni podmnozina.
- **Alexanderovo lemma** Nechť pro nějakou subbasi S prostoru $X = (X, \tau)$ plati, ze z kazdeho pokryti $U \subseteq S$ lze vybrat konecne podpokryti. Potom X je kompaktni. **<u>DK:</u>**(sporem) ♦<u>def</u>: pokrytí je <u>velké</u>, nelze-li z něj vybrat konečné podpokrytí ♦<u>fakt</u>: ∃velké pokrytí⇒∃maximání velké pokrytí tj. takové velké pokrytí $\mathcal{A}$, že kdykoli $U \notin \mathcal{A}$, dá se již z $\mathcal{A} \cup \{U\}$ kon.podpokrytí vybrat ♦ $\mathcal{B} = \tau \setminus \mathcal{A}$ pak $U \in \mathcal{B} \Leftrightarrow$ pro nějaké $U1,..,Un \in \mathcal{A}$ je $U \cup U1 \cup .. \cup Un = X$ (⇒ z maximality,⇐ z toho že A je stále ještě velké) Následkem toho: $V \supseteq U \in \mathcal{B} \Rightarrow V \in \mathcal{B}$ (*) $U,V \in \mathcal{B} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{B}$ (**) ♦vezměme $x \in X$ libovolný, $\mathcal{A}$ je pokrytí⇒ $\exists U \in \mathcal{A}$ tž.$x \in U$ ♦S je subase⇒ $\exists S1,..,Sn \in S$ že $x \in S1 \cap .. \cap Sn \subseteq U$ ♦$\forall Si \notin \mathcal{B}$ (pže pak by podle (**) $\cap Si$ byla v $\mathcal{B}$ a podle (*) také $U \in \mathcal{B}$, která se ale vybírala z $\mathcal{A}$) tedy $\exists Si \in \mathcal{A}$, což je SPOR, pže vzhledem k tomu, že bod x byl libovolný znamená, že již $\mathcal{A} \cap S$ je pokrytí a z něj by se muselo dát vybrat konečné.
- **Tichonovova věta o součinu** Součin libovolného systému kompaktních prostorů je kompaktní.

Souvislost: Neprázdný prostor je souvislý, neobsahuje-li kromě triviálních žádné jiné obojetné množiny; jinak říkáme, že je nesouvislý.

- Řekneme, že podmnožina A topologického prostoru X je <u>obojetná</u>, je-li zároveň otevřená i uzavřená. V každém prostoru X máme triviální obojetné množiny X a $\emptyset$.

VI: Metrické prostory

Heine-Borelova věta: Bud X topologicky prostor. Potom: (1) X je kompaktni.⇔ (2) Kazda nekonecna mnozina v X ma bod kondensace (def: ∀okolí U bodu má množina M \ U stejnou mohutnost jako M).
Je-li X metricky, jsou tato tvrzeni dale ekvivalentni s tvrzenimi: (3) Kazda nekonecna mnozina v X ma hromadny bod. (4) Z kazde posloupnosti v X lze vybrat posloupnost konvergentni.