Zkoušková písemka Náhodné procesy II, 3.6.2010

Př. 1

Dokažte, že funkce $cos(t)$ je autokovarianční funkcí nějaké náhodného procesu. Napište definici spojitosti podle kvadratického středu a větu týkající se spojitosti podle kvadratického středu. Rozhodněte, zda je proces s touto autokovarianční funkcí spojitý podle kvadratického středu, případně doplňte předpoklady.

Př. 2

Mějme posloupnost $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ definovanou

$$Y_t = \rho Y_{t-1} + e_t \qquad |\rho| < 1,$$

kde

$$e_t = \begin{cases} u_t & t = 0, \pm 2, \pm 4, ... \\ 2^{-\frac{1}{2}} \cdot (u_t^2 - 1) & t = \pm 1, \pm 3, ... \end{cases}$$

kde u_t jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s rozdělením $N(0, 1)$.
a) rozhodněte, zda je posloupnost $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ striktně stacionární
b) rozhodněte, zda je posloupnost $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ slabě stacionární
c) určete autokovarianční funkci posloupnosti
d) rozhodněte, zda existuje spektrální hustota posloupnosti $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$, pokud ano, spočtěte ji

Př. 3

Napište definici parciální autokovarianční funkce a spočtěte první 3 koeficienty parciální autokovarianční funkce posloupnosti

$$X_t = Y_t + \frac{1}{2} Y_{t-1}, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad Y_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

Př. 4

Nechť $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je náhodná posloupnost

$$X_t = Y_t + \frac{1}{2} Y_{t-1}, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad Y_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

a) rozhodněte, zda je posloupnost $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ ergodická
b) spočtěte hustotu $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$
c) určete, zda je posloupnost $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ invertibilní, pokud ano, vyjádřete posloupnost $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ jako AR(∞)
d) spočtěte nejlepší lineární předpověď X_{n+1}, pokud známe celou historii až do času n včetně

Formulace není úplně přesná, ale tak obsahově je jasné, co se chtělo.