Věta (Lagrangeova věta o vázaných extrémech)

$G \subseteq \mathbb{R}^n$, otevřená, $s < n$, $g_1, \dots, g_s \in C^1(G)$, $f \in C^1(G)$

$M = \{x \in \mathbb{R}^n : g_1(x) = g_2(x) = \dots = g_s(x) = 0\}$

Pokud 1, $a \in M$ je bodem lokálního extrému f na M

2, vektory $\underbrace{\nabla g_1(a)}_{\left(\frac{\partial g_1(a)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g_1(a)}{\partial x_n}\right)}, \dots, \nabla g_s(a)$ jsou lineárně nezávislé ... gradient funkce

tak existují $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\nabla f(a) = \lambda_1 \nabla g_1(a) + \dots + \lambda_s \nabla g_s(a)$$

(obrácená implikace neplatí)

$g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$

$\nabla g_1 = (2x, 2y, 2z)$

$\nabla f = \lambda (2x, 2y, 2z)$

---

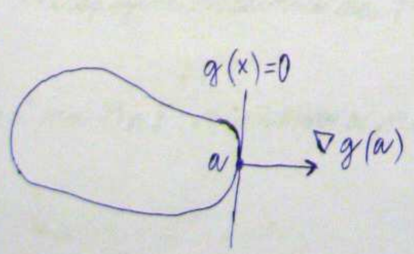
29. 4. 2009
10. přednáška

Pozn. Tečná (nad)rovina

k ploše $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$

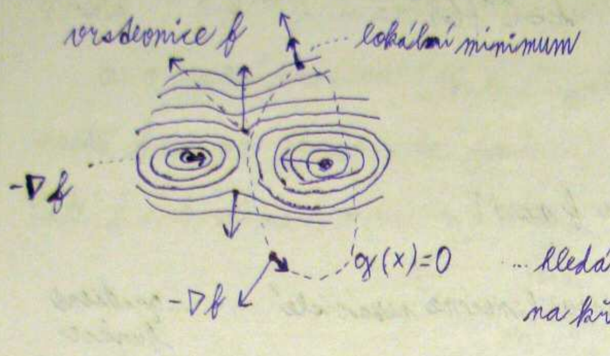
v $a \in \mathbb{R}^n$ má rovnici

$$\{x : \nabla g(a) \cdot x - \nabla g(a) \cdot a\}$$



př. pro $s=1$; $f, g = g_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

... gradient - jde do kopce



... hledáme extrémy fce f na křivce $g(x)=0$

skutečný důkaz:
viz věta o implicitní funkci

pozn.
$$\nabla g(a) = \left(\frac{\partial g(a)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial g(a)}{\partial x_n} \right)$$

př. nejvyšší bod míče

$f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$f(x_1, x_2, x_3) = x_3$

$g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$ ... povrch míče

$\nabla f = (0, 0, 1)$

... směr největšího nárůstu je směrem vzhůru

tj. kdy můžou nastat ty extrémy?

př. $G = \{x_1 > 0, x_2 > 0, \ldots, x_n > 0\}$

$M = \{x_1 + \ldots + x_n = 1\}$

$g(x) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n - 1$

extrém: $f(x) = \sum_{i=1}^{n} - x_i \log_2 x_i$ = entropie $H(p_1, \ldots, p_n)$ … něco jako průměrný počet bitů potřebný při kódování písmen ~ …

pokud $\underline{a}$ je extrém, $\nabla g(a) \neq 0$

$$\Downarrow$$

$$\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = 1 \Rightarrow \nabla g(a) = (1, 1, \ldots, 1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = -\log_2 x_i - \frac{x_i}{x_i} \cdot \frac{1}{\ln 2}$$

$$\nabla f = \left(\ldots\ldots, -\log_2 x_i - \frac{1}{\ln 2}, \ldots \right)$$

… pokud a je extrém

$$\Rightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \frac{1}{n}$$

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n} -\frac{1}{n} \log_2 \frac{1}{n} = \underline{\log_2 n}$$

1, $F = [0,1]^n$, $M \cap F$ je uzavřená množina, omezená mn.

2, f lze spojitě rozšířit na $M \cap F$

$\Rightarrow$ f má na $M \cap F$ minimum a maximum

$\downarrow$

↓ nechť f nabývá globálního maxima na $M \cap F$ v bodě $\underline{a}$:

... max v bodě $\underline{a}$

1, $\forall i \; a_i > 0$ ..... $a = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$

2, $\exists i \; a_i = 0$

můžeme předpokládat $a_1, \dots, a_n > 0$
$a_{k+1} = \dots = a_n = 0$

$\Rightarrow$ stejná úloha pro $\underline{k}$ místo $\underline{n}$

$$\Rightarrow \Big(\underbrace{\tfrac{1}{k}, \tfrac{1}{k}, \dots, \tfrac{1}{k}}_{k.}, 0, \dots, 0\Big)$$

$\downarrow$

$f = \log_2 k$

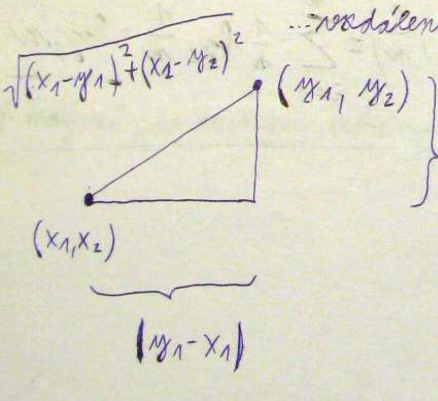
pozn. hledali jsme extrémy na množině $\{g_1 = 0, g_2 = 0, \dots\}$

Existuje i varianta pro extrémy na množině $\{g_1 = 0, g_2 \leq 0, g_3 \geq 0, \dots\}$

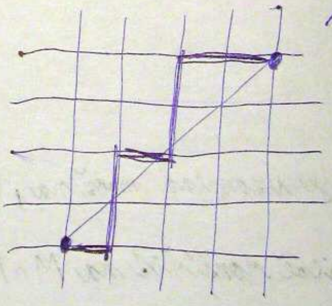
(Karush-Kuhn-Tuckerova věta, viz. lineární programování)

METRICKÉ PROSTORY

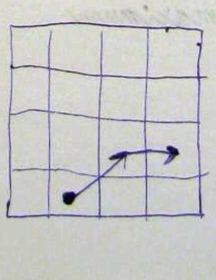
různé pohledy na vzdálenost:



silnice v Manhattanu (vzdálenost ve čtvercové síti)



$\rightarrow |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$



vzdálenost - počet tahů králem

$\max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$

1 ↓ *pro spor:*

$$f(y) \neq s$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\,|s - f(y)| \; \dots \text{ existuje } \delta$$

$$\to \exists k_0 \; \forall k > k_0 : y_k \in B_\rho(y, \delta) \Rightarrow |f(y_k) - f(y)| < \varepsilon$$

SPOR

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{k \to \infty} f(y_k)}_{= s} \leq (f(y) + \varepsilon) < s$$

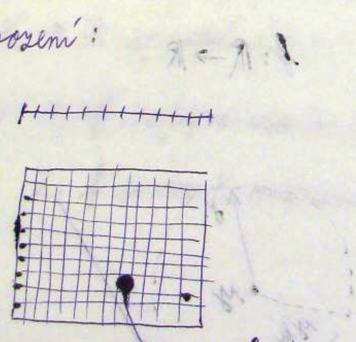
Vícerozměrný Riemannův integrál

př: $f: [0,1]^n \to \mathbb{R}$

chci zjistit "součet"

$$\int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1, \dots, dx_n$$

odvození:



sup $f(x)$

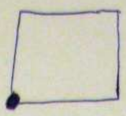
inf $f(x)$ $\rightsquigarrow$ R. integrál

$(x \;)$

Jak ho spočítat?

Fubiniho věta (Fubiniova)

př. $\int_0^1\int_0^1 x^2+y^2 \, dx\,dy =$



$$= \int_0^1 \left(\underbrace{\left[\frac{x^3}{3}+y^2\cdot x\right]_0^1}_{\frac{1}{3}+y^2} \right) dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{3}+y^2\right) dy = \left[\frac{y}{3}+\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

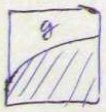
aplikace:

obsah S: $S \subseteq [0,1]^2$

$$f:[0,1]^2 \to \mathbb{R} : f(x,y) \begin{cases} 1 & \dots \text{ mn. } S \\ 0 & \dots \text{ mn } S \end{cases}$$

?

$$\text{obsah } S = \int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy$$



k zamyšlení:

souvislost tohoto obsahu a plochy pod křivkou