(b) Dirichletova funkce definovaná na R jako f(x) = 0 pro iracionální x a f(x) = 1 pro racionální x, má RI na [0,1]? Vydělme interval na P = { x0, x1, ..., xn }, mezi xj a xj+1 je vzdy irac.číslo => inf na [xj,xj+1]=0 => dolni s(f,D)=0 , mezi xj a xj+1 je vzdy rac.číslo => sup na [xj,xj+1]=1 => horni S(f,D)=1 , horni RI=inf S(f,D)=1 $\neq$ dolni RI=sup s(f,D)=0 => **nemá RI na [0,1]**

(b) Pro které hodnoty parametru w má funkce f : [0;1] -> R, kde f(x) = x^w pro x > 0 a f(0)=1, Riemannův integrál? w>0 omez,1bod nesp.$\Rightarrow$1.8(Lebesgue)$\Rightarrow$RI, w=0 spojitá$\Rightarrow$1.7$\Rightarrow$RI, w<0 neomez.$\Rightarrow$1.1$\Rightarrow$neni RI

(b) Rozhodněte, zda funkce f : [0;1] -> R definovaná jako f(x) = x pro racionální x a f(x) = sin(x) pro iracionální x má Riemannův integrál a spočítejte odhad pro horní a dolní integrál. Vydělme interval na P = { x0, x1, ..., xn }, křivka x je nad sin(x), mezi xj a xj+1 je vzdy rac.číslo $\Rightarrow$ sup na [xj,xj+1]=xj+1=(j+1)/n $\Rightarrow$ horni S(f,D)= 1/n $\sum$(j=0..n-1) (j+1)/n = 1/n^2 ((n^2+n)/2+n)=½+1/2n, horni RI=lim ½+1/2n=1/2 **;** dolni RI=$\int$_0^1 sinx=-cos1+1 $\Rightarrow$ ½ < -cos1+1 $\Rightarrow$ ½ > cos1 $\Rightarrow$ cos(Pi/3) > cos1 $\Rightarrow$ **nemá RI na [0,1]**

(b) najděte fci f : [0;1] -> R **co ma horni i dolni RI =+∞** • 1/x dodefinovaná v 0 vypocet: vydělme interval na P = { x0, x1, ..., xn }, inf na [xj,xj+1]=1 /(jn) => dolni s(f,D)= 1/n $\sum$(j=0..n-1) 1 /(jn) =+∞, sup na [xj,xj+1]=xj+1=1/(n(j+1)) => horni S(f,D)= 1/n $\sum$(j=0..n-1) 1/(n(j+1)) = +∞, horni RI=+∞= dolni RI= +∞

(b) dokažte f : [0;1] -> R má na [0,1] RI => g(x)=max(1,f(x)) má na [0,1] RI Podle Lebesgue: •f(x) je omezená, tzn. $\exists$ číslo M, že $\forall$ x$\in$A platí |f(x)|$\leq$ M to se fcí max nijak nezmění, nebo maximálně se M=1 =>g(x) je omezená •f(x) má množinu bodů nespojitosti M s mírou nula, a g(x) má množinu bodů nespojitosti N$\subseteq$M dk: •pro f(x)$\geq$1 se g(x)=f(x) =>množina bodů nesp.je stejná •pro f(x)<1 se g(x)=1 =>nepřidává žádné body nespojitosti => N má míru 0

(b) Pro množinu X (je podmnožina reálných čísel) a reálné číslo c označíme cX = {cx : x je prvkem X}. Rozhodněte, zda je pravdivá ekvivalence: Množina X má míru nula, právě když pro každé reálné číslo c má množina cX míru nula. Musí. **($\Rightarrow$)**pokud už má míru nula, násobením c jí této vl.nezbavíme (zvýšíme pouze intervaly) **($\Leftarrow$)**každá cX má míru 0 tak 1X=X má míru 0

(b) f má na (0,1) Newtonův integrál , platí f+g má N. integrál <=> g má N. integrál ??? na (0,1) Musí z aritmetiky limit: lim(x->a) (f+g)=lim(x->a)f+lim(x->a)g **($\Rightarrow$)** (N) $\int$_a^b (f+g)=lim(x->1-)F(x)+lim(x->1-)G(x)-(lim(x->0+)F(x)+lim(x->0+)G(x))=lim(x->1-)(F(x)+G(x))-lim(x->0+)(F(x)+G(x)) takže ex. lim(x->1-)G(x),lim(x->0+)G(x) **($\Leftarrow$)** lim(x->1-)G(x),lim(x->0+)G(x) ex. takže (N) $\int$_a^b (f+g)=lim(x->1-)F(x)+lim(x->1-)G(x)-(lim(x->0+)F(x)+lim(x->0+)G(x))=lim(x->1-)(F(x)+G(x))-lim(x->0+)(F(x)+G(x))

(b) Nechť je funkce definovaná na (0, 1), kde je i spojitá a omezená. Musí mít na (0, 1) Newtonův integrál? Musí. Funkci *f* v nule a jedničce libovolně dodefinujeme. Potom je podle Lebesgua riemannovsky integrovatelná a proto pro ni podle první základní věty analýzy existuje na [0, 1] spojitá a na (0, 1) primitivní funkce *F*, pro kterou díky její spojitosti v krajních bodech existují vlastní jednostranné limity potřebné pro Newtonův integrál.

(b) Je dán bod a v R^m. Rozhodněte, zda každá matice A s rozměrem n krát m a reálnými položkami je Jacobiho maticí v bodě a nějakého zobrazení F z R^m do R^n. Své tvrzení zdůvodněte. Ano, staci vzít zobrazení fi(x1,..,xn)=a_i1x1+..+ a_n1xn pak ∂fi/∂xj=a_ij

(b) Necht I je n-rozmerny box a D je jeho deleni. Dokazte, ze soucet objemu |J| podboxu J v D je rovny objemu |I| boxu I. opravdu platí: |I|=$\sum$(i=1..n) (bi-ai)=$\sum$(i=1..n) (ci^1-ci^0)+(ci^2-ci^1)+..+(ci^ki - ci^(ki-1))= $\sum$(J$\in$D) |J| kde ci jsou z def.dělení int [ai,bi]: ai=ci^0<ci^1<..<ci^ki=bi

(b) Aproximujte funkci f(x) = ye^(-sin(x-z)) v okolí bodu (0,0,0) polynomem druhého stupně T2([x0,y0,z0]) = f([x0,y0]) + f'x ([x0,y0,z0])(x-x0) + f'y ([x0,y0,z0])(y-y0) + f'z ([x0,y0,z0])(z-z0) + f''xy([x0,y0,z0])(x-x0)(y-y0) + f''xz([x0,y0,z0])(x-x0)(z-z0) + 1/2!(f''xx([x0,y0,z0])(x-x0)^2 + f''yy([x0,y0,z0])(y-y0)^2 + f''zz([x0,y0,z0])(z-z0)^2) parc.derivace: f'x=-ye^(-sin(x-z))cos(x-z f''xx=ye^(-sin(x-z))(cos^2(x-z)+sin(x-z)) f''xy=-e^(-sin(x-z)) cos(x-z f''xz=-ye^(-sin(x-z))(cos^2(x-z)+sin(x-z)) f'y=e^(-sin(x-z)) f''yy=0 f''yz=e^(-sin(x-z)) cos(x-z) f'z=ye^(-sin(x-z)) cos(x-z) f''zz=ye^(-sin(x-z))(cos^2(x-z)+sin(x-z))

(b) f(x,y,z,u) = a|x|+b|y|+c|z|+d|u| najděte všechny parametry a,b,c,d aby v bodu (0,0,0,0) nemela lok. extrem a=a, b=(opačné znamínko k a)b, c->0, d->0 pripadně obměny dk: f(0,0,0,0)=0 zvolme podokolí které je průnikem lib. okolí s plochou x=x,y=y,z=0,u=0 pak zřejmě platí f(x,y,0,0)=a|x|-a|y| pokud je x$\geq$y pak f(x,y,0,0)$\geq$0 a pokud je x<y pak f(x,y,0,0)<0 $\Rightarrow$ v bodě (0,0,0,0) není lok. extrém

(b) Nechť X je množina reálných čísel (pracujeme v euklidovském prostoru R s obvyklou metrikou), která není ani prázdná ani rovná celému R. Dokažte, že taková X nemůže být současně otevřená i uzavřená množina. Návod: použijte supremum. X ani R\X zřejmě nemůžou být $\emptyset$ ani R, X je otevřená pokud $\forall$a$\in$X $\exists$r>0: B(a,r)$\subset$X tzn že ex.supremum z R\X, R\X je tedy uzavřená tzn supremum R\X je z R\X, pokud má být ale X také uzavřená pak R\X musí být otevřená a její supremum musí být v X což je spor