Písemná zkouška PDR 19.6.2009

1. Nechť $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Gamma$, $\Omega_i \in \mathcal{C}^{0,1}$, $\Gamma_i = \partial\Omega_i \setminus \Gamma$, $i = 1,2$; viz obrázek. Nechť $\tilde{u}_0 \in W^{1,2}(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\Gamma_1), u \in W^{1,2}(\Omega)$ splňují

$$u - \tilde{u}_0 \in V := \left\{v \in W^{1,2}(\Omega),\ \text{“}v|_{\Gamma_2} = 0 \text{ ve smyslu stop”}\right\} \tag{1}$$

$$\int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} dx = \int_{\Gamma_1} g\varphi dS + \int_\Omega f\varphi dx \ \forall\ \varphi \in V, \tag{2}$$

kde

$$\begin{aligned} a_{ij}(x) &= \mu_1 \delta_{ij}\ \forall\ x \in \Omega_1, \\ a_{ij}(x) &= \mu_2 \delta_{ij}\ \forall\ x \in \Omega_2, \\ \mu_1, \mu_2 &\geq 0,\ \mu_1 \neq \mu_2. \end{aligned}$$

Úlohy:

A. Za předpokladu $u \in W^{2,2}(\Omega)$ odvoďte klasické řešení té úlohy, která je v (1) a (2) definována slabě. [6b]

B. Zformulujte větu o existenci, jednoznačnosti a spojité závislosti na datech slabého řešení (1) - (2). Větu podrobně dokažte. [8b]

C. Předpokládejte, že $f \in L^2(\Omega)$, $g \in W^{\frac{1}{2},2}(\Gamma_1)$, $\Omega \in \mathcal{C}^{1,1}$ a $\tilde{u}_0 \in W^{2,2}(\Omega)$. Stačí tyto předpoklady automaticky k důkazu regularity $u \in W^{2,2}(\Omega)$? Podrobně zdůvodněte. [3b]

D. Ukažte, že u splňuje (1) a (2), právě když minimalizuje jistý funkcionál. Funkcionál explicitně uveďte.[8b]

2. $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, omezená množina. Uvažte úlohu: pro dané funkce $c, f : (0,T) \times \Omega \to \mathbb{R}$, $g : (0,T) \times \partial\Omega \to \mathbb{R}$ a u_0, $v_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ nalézt $u : (0,T) \times \Omega \to \mathbb{R}$ splňující:

$$\begin{aligned} u_{,tt} - \Delta u + u + cu &= f \text{ v } (0,T) \times \Omega, \\ u(0,x) &= u_0(x) \text{ v } \Omega, \\ u_t(0,x) &= v_0(x) \text{ v } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(t,x) &= g(t,x) \text{ v } (0,T) \times \partial\Omega \end{aligned}$$

Úlohy:

A. Určete, o jaký typ úlohy se jedná. [2b]

B. Předpokládejte, že $g(t,x) = g(x) \in L^2(\partial\Omega)$ (tj. g nezávisí na t!). a $c \in L^\infty(0,T; L^\infty(\Omega))$. Odvoďte základní energetický odhad. Pomocná tvrzení, která k odvození použijete, zformulujte.
Návod: Uvažte, že $\|u\|_{1,2}^2 + \int_{\partial\Omega} gudS \geq \frac{1}{2}\|u\|_{1,2}^2 - C(g)$. Ukažte, že tato nerovnost platí. [7b]

C. Na základě energetického odhadu zformulujte definici slabého řešení, včetně předpokladů na data u_0, v_0, f. [3b]

D. Zformulujte větu o existenci a jednoznačnosti slabého řešení. [4b]

E. Dokažte jednoznačnost slabého řešení. [5b]

F. Jak lze oslabit předpoklady na c a g tak, aby stále platily energetické odhady? Uvažte případ $d = 3$. [5b]