

Písemka z matematické analýzy pro matematiky  
2. ročník, letní semestr

Počtení část

**Příklad 1** Napište (v co nejjednodušší formě) kosinovou řadu, která má na intervalu  $[0, \pi]$  za součet funkci  $\sin x$ . Tuto její vlastnost dokažte. Napište znění tvrzení, kterého užíváte; předpoklady ověřte.

(5 bodů)

**Příklad 2**

Nechť

$$M := \{(x, y) : x^2 + y^2 = 25\} \quad \text{a} \quad f(x, y) = x^2 + y^2 + 16x - 12y.$$

Spočítejte  $S := \sup_{t \in M} f(t)$  a  $I := \inf_{t \in M} f(t)$ .

Podrobně zdůvodněte. Předpoklady užitých vět ověřte výpočtem. Používáte-li větu o vázaných extrémech, přesně ji zformulujte a vysvětlete, jak ji používáte (co je  $f$ ,  $G$ , ... apod.)

(6 bodů)

**Příklad 3** Vyšetřete lokální extrémy a absolutní (globální) extrémy funkce

$$f(x, y) = \frac{4}{x} + \frac{2}{y} + xy$$

na množině  $M = (0, \infty) \times (0, \infty)$ .

Svůj postup podrobně a srozumitelně vysvětlete. Předpoklady použitých vět srozumitelně ověřte výpočtem.

(9 bodů)

**Hodnocení**

Je nutné dosažení aspoň 7\* bodů jak z počtení, tak i z teoretické části. Dále je nutno získat:

na hodnocení dobře...19\* bodů z obou částí dohromady;

na hodnocení velmi dobře...24\* (18; 5\* z úlohy D2);

na hodnocení výborně...28\* (20; 6 z úlohy D2).



**Písemka z matematické analýzy pro matematiky**  
2. ročník, letní semestr

**Teoretická část**

**Úloha A**

(a) Napište (úplnou) definici souvislého metrického prostoru.

(b) Napište definici absolutně spojitě funkce.

(2+2 body)

**Úloha B**

(a) Napište znění Baireovy věty. Použité pojmy (ze 4. semestru) plně definujte.

(b) Napište znění Fejérové věty. Použité pojmy definujte.

(2+2 body)

**Úloha C**

Dokažte, že v reálném Hilbertově prostoru  $L^2(0, 2\pi)$  neexistuje úplný ortonormální systém funkcí  $(f_n)_{n=1}^{\infty}$  takový, že

$$\int_0^x f_n(x) dx + \int_x^{2\pi} x f_n(x) dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Srozumitelně zdůvodněte. Fakta (tvrzení, věty) z přednášek, která používáte, zformulujte bez důkazu.

(4 body)

**Úloha D**

(Volba mezi D1 a D2, počítá se lepší z obou řešení.)

**D1**

(i) Zformulujte tvrzení o Besselově nerovnosti v unitárním prostoru. Použité pojmy definujte.

(ii) Toto tvrzení podrobně a srozumitelně dokažte.

(6 bodů)

**D2**

(i) Zformulujte větu o lokalizaci pro Fourierovy řady.

(ii) Zformulujte Diniho kritérium pro Fourierovy řady.

(iii) Dokažte Diniho kritérium pomocí věty o lokalizaci. Další potřebná tvrzení zformulujte bez důkazu.

(iv) Dokažte větu o lokalizaci. Potřebné pojmy definujte, potřebná tvrzení zformulujte bez důkazu.

(9 bodů)

**Hodnocení**

Je nutné dosažení aspoň 7\* bodů jak z početní, tak i z teoretické části. Dále je nutno získat:

na hodnocení dobře....19\* bodů z obou částí dohromady;

na hodnocení velmi dobře....24\* (18; 5\* z úlohy D2);

na hodnocení výborně.....28\* (20; 6 z úlohy D2).