Příklad 1 Nechť $\Omega = (0,1)^2$ a uvažujme triangulaci $\mathcal{T}_h$ oblasti Ω sestávající z obdélníků T takových, že libovolné dva trojúhelníky z $\mathcal{T}_h$ mají buď disjunktní vnitřky nebo jejich průnikem je společný vrchol či společná hrana. Uvažujme prostor

$$V_h = \left\{ v \in L^2(\Omega),\ v|_T \in \text{span}\left\{1, x, y, x^2 - y^2\right\}, \forall\, T \in \mathcal{T}_h, v \text{ je spojitá ve středech vnitřních hran } \mathcal{T}_h \right\}$$

Definujme operátor $\Pi_h :\ \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \to V_h$ takový, že $\forall\, v \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})\ \Pi_h v = v$ ve středech hran $\mathcal{T}_h$. Ukažte, že tato podmínka operátor Π_h jednoznačně definuje $\forall\, v \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$. Dokažte, že platí odhad chyby interpolace

$$\|v - \Pi_h v\|_{0,\Omega} \leq Ch^2\, |v|_{2,\Omega}\ \ \forall\, v \in H^2(\Omega),$$

pokud triangulace $\mathcal{T}_h$ splňují určitý předpoklad.
Je nutno odhady skutečně dokázat. Nestačí jen ověřit předpoklady obecných vět z přednášky!

Příklad 2 Nechť $\Omega = (0,1)^2$ a uvažujme úlohu

$$-\Delta u = f \text{ v } \Omega,\ u = 0 \text{ na } \partial\Omega$$

kde $f \in L^2(\Omega)$. Tuto úlohu diskretizujeme konformní metodou konečných prvků s lineárními trojúhelníkovými konečnými prvky. Dokažte, že diskrétní řešení u_h splňuje odhad

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^2\, |u|_{2,\Omega}.$$

Přitom bez důkazu využijte, že pro prvky zmíněných konečných prvků na regulárním systému triangulací lagrangeovský interpolační operátor r_h splňuje

$$\begin{gathered} \|v - r_h v\|_{0,\Omega} \leq Ch^2\, |v|_{2,\Omega}, \\ |v - r_h v|_{1,\Omega} \leq Ch\, |v|_{2,\Omega}\ \ \forall\, v \in H^2(\Omega) \end{gathered}$$

Je nutno odhady skutečně dokázat. Nestačí jen ověřit předpoklady obecných vět z přednášky!

Příklad 3 Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je omezený mnohoúhelník a $\mathcal{T}_h$ je regulární triangulace Ω složená z trojúhelníků. Uvažujme prostor

$$V_h = \left\{ v \in H_0^1(\Omega),\ v|_T \in P_k(T), \forall\, T \in \mathcal{T}_h \right\},\ k \in \mathbb{N}.$$

Víme, že

$$\exists C > 0 :\ \inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\|_{1,\Omega} \leq Ch^k\, |v|_{k+1,\Omega}\ \ \forall v \in H^{k+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

Uvažujme úlohu

$$u_{xx} + 2u_{yy} - 3u = f \text{ v } \Omega \text{ a } u = 0 \text{ na } \partial\Omega,$$

kde $f \in L^2(\Omega)$ je dáno. Zformulujte diskretizaci MKP pomocí V_h a dokažte, že

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \to 0 \text{ pro } h \to 0.$$

Příklad 4 Nechť $\Omega = (0,1)^2$ a nechť $\mathcal{T}_h$ je triangulace Ω sestávající se ze stejně velkých čtvercových elementů T. Pro každý element definujeme operátor $\Pi_T :\ \mathcal{C}(T) \to Q_2(T)$ následujícími podmínkami:

$$\begin{gathered} (\Pi_T v)(x) = v(x) \text{ pro každý vrchol } x \in T, \\ \int_E \Pi_T v \,\mathrm{d}\sigma = \int_E v \,\mathrm{d}\sigma \text{ pro každou hranu } Q \subset \partial T, \\ \int_T \Pi_T v \,\mathrm{d}x = \int_T v \,\mathrm{d}x, \end{gathered}$$

kde $v \in \mathcal{C}(T)$ je libovolná funkce. Je operátor Π_T definován jednoznačně?
Pro $v \in \mathcal{C}(\Omega)$ definujme $\Pi_h v\ \in L^2(\Omega)$ takové, že

$$(\Pi_h v)\,|_T = \Pi_T v, \ \forall\, T \in \mathcal{T}_h.$$

Je funkce $\Pi_h v$ spojitá na $\bar\Omega$?
Vyšetřete interpolační vlastnosti operátoru Π_h, tj. pro dostatečně regulární funkce v odvoďte odhad interpolační chyby v L^2-normě a H^1-normě.

Příklad 5 Nechť $\Omega = \left\{(x,y) \in (0,1)^2; x > \frac{1}{2} \text{ nebo } y > \frac{1}{2}\right\}$. Pak slabé řešení úlohy

$$-\Delta u = f \text{ v } \Omega,\ u = 0 \text{ na } \partial\Omega,$$

kde $f \in L^2(\Omega)$, obecně neleží v $H^2(\Omega)$. Na Ω definujeme triangulaci sestávající se ze stejně velkých čtverců a aproximujeme u metodou konečných prvků s prostorem

$$V_h = \left\{v \in \mathcal{C}(\Omega) \cap \in H_0^1(\Omega),\ v|_K \in Q_1(K), \forall\, K \in \mathcal{T}_h, \right\}.$$

Ukažte, že $\lim\limits_{h\to 0} \|u - u_h\|_{1,\Omega} = 0$.

Příklad 6 Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je omezená oblast s polygonální hranicí a $\mathcal{T}_h$ její triangulace sestávající z trojúhelníků. Uvažujme rovnici

$$-\nu\Delta u + cu = f \text{ v } \Omega,\ u = 0 \text{ na } \partial\Omega,$$

kde $c,\ f \in \mathcal{C}(\bar\Omega)$, $c \geq 0$ v Ω. Slabá formulace:

$$u \in H_0^1(\Omega):\ \int_\Omega \nu\nabla u\nabla v \mathrm{d}x + \int_\Omega cuv\mathrm{dx} = \int_\Omega fv\mathrm{d}x.$$

Uvažujme prostor

$$V_h = \left\{v \in H_0^1(\Omega),\ v|_T \in P_k(T), \forall\, T \in \mathcal{T}_h\right\},$$

Pro T_h splňující podmínky regularity a kompatibility pak lagrangeovská interpolace splňuje

$$\|v - \Pi_h v\|_{0,\Omega} + h\,|v - \Pi_h v|_{1,\Omega} \leq Ch^{m+1}\,|v|_{m+1,\Omega}$$

$\forall v \in H^{m+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $m = 1, \ldots, k$. $\forall\, T \in \mathcal{T}_h$ definujeme $r_T : \mathcal{C}(T) \to P_1(T)$ tak, že $r_T v = v$ ve vrcholech T $\forall\, v \in \mathcal{C}(T)$. Definujeme diskrétní problém

$$u_h \in V_h:\ \nu\int_\Omega \nabla u_h\nabla v_h \mathrm{d}x + \sum_{T\in\mathcal{T}_h}\int_T (r_T c)u_h v_h \mathrm{d}x = \sum_{T\in\mathcal{T}_h}\int_T (r_T f)v_h \mathrm{d}x\ \forall v_h \in V_h.$$

Vyšetřete řád konvergence chyby $|u - u_h|_{1,\Omega}$.

Příklad 7 Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je omezená oblast s polygonální hranicí a $\mathcal{T}_h$ její triangulace sestávající z trojúhelníků. Buď $T > 0$ a označme $\Omega_T = \Omega \times (0,T]$. Uvažujme úlohu

$$u_t - \Delta u = f \text{ v } \Omega_T,\ u = 0 \text{ na } \partial\Omega \times [0,T],\ u(\cdot,0) = u_0 \text{ v } \Omega.$$

Uvažujme prostor

$$V_h = \left\{v \in H_0^1(\Omega),\ v|_T \in P_k(T), \forall\, T \in \mathcal{T}_h\right\}.$$

Semidiskretizací prostoru v prostoru V_h získáme diskrétní řešení $u_h : [0,T] \longrightarrow V_h$.
Pokud f závisí spojitě na čase, je $u_h \in \mathcal{C}^1\left([0,T], V_h\right)$. Odvoďte odhad pro chybu
$\|u(t) - u_h(t)\|_{0,\Omega}$

Příklad 8 Nechť je dán na referenčním konečném prvku $(\hat T, \hat P, \hat\Sigma)$ kvadraturní vzorec

(*) $\sum_{l=1}^{L} \hat{\omega}\hat{\varphi}(\hat{b}_l)$ pro aproximaci integrálu $\int_{\hat{T}} \hat{\varphi} \mathrm{d}\hat{x}$, kde $\hat{b}_l \in \hat{T}$ a $\hat{\omega}_l \geq 0,\ l = 1, \ldots, L$. Uvažujme triangulaci $\mathcal{T}_h$, jejíž prvky jsou afinně ekvivalentní $\hat{T}$, a $\forall\, T \in \mathcal{T}_h$ definujme kvadraturní vzorec $\sum_{l=1}^{L} \omega_{l,T}\varphi(b_{l,T})$, kde $\omega_{l,T}$ a $b_{l,T}$ jsou definovány pomocí $\hat{\omega}_l$ a $\hat{b}_l$ na základě afinní ekvivalence mezi T a $\hat{T}$. Nechť $\hat{P} \subset P_m(\hat{T})$ a kvadraturní vzorec (*) je přesný pro polynomy stupně $2m-2$. Na každém $T \in \mathcal{T}_h$ uvažujme konečný prvek (T, P_T, Σ_T) afinně ekvivalentní $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ a definujeme odpovídající prostor konečných prvků V_h. Nechť Ω je vnitřek množiny $\bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T$ (předpokládáme $\Omega \subset \mathbb{R}^n$) a uvažujme funkce $a_{ij} \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}),\ i, j = 1, \ldots, n$ splňující

$$\exists\, \theta > 0 : \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \ \forall x \in \bar{\Omega}, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Nechť

$$a(u, v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} \mathrm{d}x = \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} \mathrm{d}x$$

a definujme bilineární formy a_h tak, že integrály přes množiny T vypočítáme pomocí výše uvedeného kvadraturního vzorce. Ukažte, že bilineární formy a_h jsou stejnoměrně v_h- eliptické, tj. že

$$\exists \alpha > 0 : \ a_h(v_h, v_h) \geq \alpha \, |v_h|_{1,\Omega}^2 \ \ \forall\ v_h \in V_h,\ h > 0.$$

(Předp., že $|\cdot|_{1,\Omega}$ je norma na V_h).

Příklad 9 Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je omezená oblast s lipschitzovsky spojitou hranicí a

$\Omega_T = \Omega \times (0, T]$, kde $T > 0$ je pevně zvolený čas. Uvažujme úlohu pro $u = u(x, t)$ $(x \in \bar{\Omega}, t \in [0, T])$

$$u_t - \Delta u = f \text{ v } \Omega_T,\ u = 0 \text{ na } \partial\Omega \times [0, T]\,,\ u(\cdot, 0) = u_0 \text{ v } \Omega.$$

Nechť $\mathcal{T}_h$ je regulární simpliciální triangulace Ω a nechť

$$V_h = \left\{ v \in H_0^1(\Omega), v|_T \in P_k(T)\ \forall\ T \in \mathcal{T}_h \right\}$$

, kde k je zvolené přirozené číslo. Semidiskretizací v prostoru pomocí V_h získáme diskrétní řešení $u_h : [0, T] \to V_h$. Za předpokladu, že u je dostatečně regulární, odvoďte odhad pro chybu $|u(t) - u_h(t)|$.

Příklad 10 Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je omezený mnohostěn a nechť $\mathcal{T}_h$ je triangulace Ω složená z čtyřstěnů. Uvažujme prostor

$$V_h = \left\{ v \in L^2(\Omega), v|_T \in P_k(T)\ \forall\ T \in \mathcal{T}_h \right\},\ k \in \mathbb{N}_0.$$

Nechť $P_h : L^2(\Omega) \overset{na}{\to} V_h$ je ortogonální L^2 projekce. Odvoďte odhad pro $\|v - P_h v\|_{0,\Omega}$.

Příklad 11 Nechť $\Omega = (0, 1)^2$ a uvažujme úlohu

$$-\Delta u = 0 \text{ v } \Omega,\ u = 0 \text{ na } \partial\Omega, \text{ kde } f \in L^2(\Omega).$$

Tuto úlohu diskretizujeme konformní metodou konečných prvků s lineárními trojúhelníkovými konečnými prvky. Dokažte, že diskrétní řešení u_h splňuje odhad

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^2 \, |u|_{2,\Omega}.$$

Přitom bez důkazu využijte, že pro prostory zmíněných konečných prvků na regulárním systému triangulací lagrangeovský interpolační operátor r_h splňuje

$$\|v - r_h v\|_{0,\Omega} \le Ch^2 \, |v|_{2,\Omega}, \; |v - r_h v|_{1,\Omega} \le Ch \, |v|_{2,\Omega}$$

Je nutno odhady skutečně dokázat. Nestačí jen ověřit předpoklady obecných vět z přednášky!

Příklad 12 Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je omezená oblast s polygonální hranicí a $\mathcal{T}_h$ její triangulace sestávající z trojúhelníků. Uvažujme slabou formulaci: najít $u \in H_0^1(\Omega)$:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} \mathrm{d}x = \int_\Omega f v \mathrm{d}x \;\forall v \in H_0^1(\Omega),$$

kde $a_{ij}, f \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$,

$$\exists\, \theta > 0 : \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \ge \theta \, |\xi|^2 \;\; \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Nechť $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ je prostor po částech lineárních konečných prvků a definujme diskrétní problém: najít $u_h \in V_h$:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T a_{ij}(C_T)(u_h)_{x_i}(v_h)_{x_j} \mathrm{d}x = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T f(C_T) v_h \mathrm{d}x \;\forall\; v_h \in V_h,$$

kde C_T je těžiště trojúhelníku T. Ukažte, že za určitých předpokladů platí $|u - u_h|_{1,\Omega} \le Ch$, kde C nezávisí na h a specifikujte předpoklady, které jsou pro to postačující.
Je nutno odhady skutečně dokázat. Nestačí jen ověřit předpoklady obecných vět z přednášky!