MAREK CÚTH

(1) (a) • spektrální poloměr $r(T) = \sup\{|\lambda|;\ \lambda \in \sigma(T)\}$

$\sigma(T)$: pro $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ stačí spočítat vl. čísla: [$\dim < \infty$ kompaktní operátor $\Rightarrow \sigma(T) \subseteq \{0\} \cup \sigma_p(T)$ vl. čísla "0", vl. čísla]

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^3 = 0 \iff \lambda = 0$$

tedy: $\sigma(T) = \{0\} \Rightarrow \underline{r(T) = 0}$

• $I + T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \sigma(I+T) \ldots \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 = 0 \iff \lambda = 1$

$\Rightarrow \sigma(I+T) = \{1\}$

(b) ~~je matice normální: $(I+T)^* = (I+T)^T$~~

$$\cancel{(I+T)(I+T)^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \ldots \end{pmatrix}}$$

$$\cancel{(I+T)^*(I+T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \ldots \end{pmatrix}} \neq$$

~~není normální $\Rightarrow$ nelze použít speciální kalkulus~~

holomorfní kalkulus:

• ~~$(wI - T)^{-1}$:~~

$$\cancel{(wI - T)x = y \rightsquigarrow \begin{pmatrix} w & -1 & 0 \\ 0 & w & -1 \\ 0 & 0 & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Rightarrow x_3 = \frac{1}{\ }}$$

• $(wI - (I+T))^{-1}$:

$$\begin{pmatrix} w-1 & -1 & 0 \\ 0 & w-1 & -1 \\ 0 & 0 & w-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Rightarrow x_3 = \frac{y_3}{w-1}$$

$$x_2 = \frac{y_2}{w-1} + \frac{y_3}{(w-1)^2}$$

$$x_1 = \frac{y_1}{w-1} + \frac{y_2}{(w-1)^2} + \frac{y_3}{(w-1)^3}$$

$$(wI - (I+T))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{w-1} & \frac{1}{(w-1)^2} & \frac{1}{(w-1)^3} \\ 0 & \frac{1}{w-1} & \frac{1}{(w-1)^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{w-1} \end{pmatrix}$$

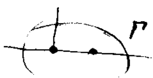
POKRAČ. STR. 2

MAREK VÍTH

Dosadíme nyní do definice!

$$\sin(I+T) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \sin w \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{w-1} & \frac{1}{(w-1)^2} & \frac{1}{w(w-1)^3} \\ 0 & \frac{1}{w-1} & \frac{1}{w(w-1)^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{w} \end{pmatrix} dw =$$

Γ je kř. obsahující 0,1 v $\mathbb{C}$, tedy:



formálně zde počítám ~~nikoli s tím~~ nikoli pod souřadnice matice => dle def. Lebesgueova integrálu! ~~[illegible]~~

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\sin w}{w-1}dw & \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\sin w}{(w-1)^2}dw & \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\sin w}{w(w-1)^3}dw \\ 0 & \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\sin w}{w-1}dw & \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\sin w}{w(w-1)^2}dw \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\sin w}{w}dw \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{Cauchyova věta}}{\overset{?}{=}} \cancel{\begin{pmatrix} \sin 1 & \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \sin w\left(\frac{1}{(w-1)^2}\right)dw & \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \sin w\left(\frac{1}{w} - \frac{1}{w-1} + \frac{1}{(w-1)^2}\right)dw \\ 0 & \sin 1 & \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \sin w\left(\frac{-1}{w} + \frac{1}{w-1}\right)dw \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} =$$

$\sin 0 = 0$

$1 = A(w-1)^2 + Bw(w-1) + Cw$ — 0: $A=1$, 1: $C=1$, $B=-1$

$1 = A(w-1) + Bw$ — $A=-1$, $B=1$

$$= \begin{pmatrix} \sin 1 & \cos 1 & \frac{1}{2}\sin 1 \\ 0 & \sin 1 & \cos 1 \\ 0 & 0 & \sin 1 \end{pmatrix}$$

17

Cauchyova věta + derivace $\int$ podle parametru

$$\left[\begin{array}{l} \sin\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\sin w}{w-\lambda}dw \\ \downarrow \\ \cos\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\sin w}{(w-\lambda)^2}dw \\ \downarrow \\ -\sin\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\sin w}{\ \ }\cdot 2 \end{array}\right] \quad -2\sin w\,(w-\lambda)^{-3}$$

② (a) $x^2\left(\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\delta\right)$ ... [illegible] [illegible] [illegible] $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$!

$$(x^2\,\Delta\delta)(\varphi) = (\Delta\delta)(x^2\varphi) \overset{(-1)^2=1}{=} \delta(\Delta(x^2\varphi)) =$$

+0.75

$$= (\Delta(x^2\varphi))(0) =$$

NECHÁPU ZATÍM NA PŘÍPADĚ??

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(x^2\varphi) =$$

(b) $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

DOSAZENÍ DO DEFINICE!

$$(f u)'(\varphi) = -(f u)(\varphi') = -u(f\cdot\varphi'),$$

$$(f' u)(\varphi) = u(f' u),$$

$$(f u')(\varphi) = u'(f\varphi) = -u((f\varphi)') = -u(f'\varphi + f\varphi') =$$

$$= -u(f'\varphi) - u(f\varphi'),$$

$$\Rightarrow (f u)'(\varphi) = (f' u)(\varphi) + (f u')(\varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow (f u)' = f' u + f u' \quad \boxtimes$$

2 7/3

(c)

$$(\widehat{u_f})(\varphi) \overset{\text{def.}}{=} (u_f)(\hat{\varphi}) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\hat{\varphi}(x)\,dx =$$

$\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-(x-1)^2}\left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(\lambda)\, e^{-i\lambda x}\, d\lambda\right) dx \;\; \overset{\text{FUBINI}}{=}$$

FUBINI ($\forall$ fce jsou z L^1 → OK ✓) ← [illegible] jsou z $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

STR 3+1/2

$$~~= \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(\lambda)\, e^{-x^2+2x-1-i\lambda x}\, d\lambda\, dx \overset{\text{FUBINI}}{=} \int_{\mathbb{R}} \varphi(\lambda)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2+(2-i\lambda)x-1}\, dx\right) d\lambda =~~$$

$$~~= e^{-1}\int_{\mathbb{R}} \varphi(\lambda)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, e^{(2-i\lambda)x}\, dx\right) d\lambda~~ \;=$$

$~~\int e^{-x^2}~~$ $~~(2-i\lambda)\, e^{(2-i\lambda)x}~~$ $~~\int_0^x e^{-u^2}\,du~~$

PŘECHOD. STR. 3+1/2

[[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]]

~~$$= e^{-1}\int_{\mathbb R}\varphi(\lambda)\left[\left[\int_0^x e^{-m^2}dm\; e^{(2-i\lambda)x}\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^x e^{-m^2}\, e^{(2-i\lambda)x}\,dm\right)dx\right]d\lambda =$$~~

~~$$= e^{-1}\int_{\mathbb R}\varphi(\lambda)\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\right.$$ TO ASI NE ... VRACÍME SE TROCHU ZPĚT V NAŠEM ROZLETU~~

integrujeme podle míry $d\lambda := (2\pi)^{-1/2}\,d\lambda$

subst. $x-1=y$, $|J|=1$

$$= \int_{\mathbb R}\varphi(\lambda)\left(\int_{\mathbb R} e^{-(x-1)^2}\, e^{-i\lambda x}\,dx\right)d\lambda = \int_{\mathbb R}\varphi(\lambda)\left(\int_{\mathbb R} e^{-y^2}\, e^{-i\lambda(y+1)}\,dy\right)d\lambda =$$

(+1)

$$= \int_{\mathbb R}\varphi(\lambda)\, e^{-i\lambda}\left(\int_{\mathbb R} e^{-y^2}\, e^{-i\lambda y}\,dy\right)d\lambda = \int_{\mathbb R}\varphi(\lambda)\, e^{-i\lambda}\,\hat f(\lambda)\,d\lambda = \mu_g(\varphi)$$

$f(x) := e^{-x^2}$ $\qquad$ $g(x) := e^{-ix}\hat f(x)$

~~POKUS O SPOČÍTÁNÍ $\hat f(\lambda)$~~

$\hat f$

MAREK CÚTH

12 8 1/6

③

(a) hledáme T^*:

$$(Tf, g) = (f, T^*g) = \int_{|z|\le 1} f(z)\,\overline{(T^*g)(z)}\, d\lambda^2(z)$$

$$= \int_{|z|\le 1} (z+2) f(z)\, \overline{g(z)}\, d\lambda^2(z)$$

$$\Rightarrow (T^*g)(z) = (\bar z + 2)\, g(z).$$

normalita: dk: $TT^* = T^*T$ $\left(\Leftrightarrow \|Tf\|^2_{L^2(D)} = \|T^*f\|^2_{L^2(D)}\ \forall f \in L^2(D)\right)$

$$T(T^*f)(z) = \text{"}T(\bar z + 2) f(z)\text{"} = (z+2)(\bar z + 2) f(z)$$

$$T^*(Tf)(z) = \text{"}T^*(z+2) f(z)\text{"} = (\bar z + 2)(z+2) f(z)$$

$\|$ $\Rightarrow$ T je normální

+2

správný zápis by to měl být: $T((\cdot)+2)f\ (z)$, ...

(b) $P = \sqrt{TT^*}$: [je to samoadjungovaný operátor, pokud $\sigma(TT^*) \subseteq [0, \infty)$, tak je pozitivní a tato odmocnina (pozitivní) je jednoznačná ~~...~~ míra]

dk: $\sigma(TT^*) \subseteq \overline{\{(TT^*x, x);\ x \in S_{L^2(D)}\}} = \overline{\{\|Tx\|^2;\ x \in S_{L^2(D)}\}} \subseteq [0, \infty)$

$\Rightarrow$ OK, odmocnina existuje a P pozitivní je jednoznačně určená

spočítáme jako $\sigma(TT^*)$ -- pozn. kalkulus obecně, pokud $0 \notin \sigma(TT^*)$ ~~...~~ jelikož je nám holomorfní kalkulus

• $0 \in \sigma(TT^*)$: ∃ inverze? mějme $g \in L^2(D)$: $TT^*f(z) = (|z|^2 + 2(\mathrm{Re}\, z) + 4) f(z) = g(z)$

$$\Rightarrow ?\ \frac{g(z)}{|z|^2 + 2(\mathrm{Re}\, z) + 4} \in L^2(D) \quad \text{pro } g \in L^2(D)\ ?$$

$$\left| \frac{g(z)}{\underbrace{|z|^2 + 2(\mathrm{Re}\, z) + 4}_{\ge 4-2}} \right| \le \left| \frac{g(z)}{2} \right| \in L^2(D)\ ✓ \quad \Rightarrow \text{inverze existuje} \Rightarrow 0 \notin \sigma(TT^*)$$

$\Rightarrow$ $\sqrt{\ }$ holomorfní na okolí spektra TT^*, použití pomocí holomorfního kalkulu:

• $(wI - TT^*)^{-1}$:

mějme $g \in L^2(D)$: $(wI - TT^*) f = g$

$$\Rightarrow w f(z) - (|z|^2 + 2(\mathrm{Re}\, z) + 4) f(z) = g(z)$$

$$f(z) = \frac{g(z)}{w - (|z|^2 + 2(\mathrm{Re}\, z) + 4)}$$

$\neq 0$ pro $w \notin \sigma(TT^*)$

DALŠÍ STR.

⇒ dle definice holomorfního kalkulu, a dle definice Lebesgueova integrálu (operátor $S \longmapsto (Sf)(z)$):

$$\sqrt{}\,(TT^*)\, g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \sqrt{w}\; \frac{g(z)}{w - \left(|z|^2 + 2(\mathrm{Re}\, z) + 4\right)}\, dw =$$

↓ obsahuje $\sigma(T)$ v $\mathrm{Dom}(\sqrt{})$

↓ kde je tam $\sqrt{}$ holomorfní

$$= g(z) \cdot \sqrt{|z|^2 + 2(\mathrm{Re}\, z) + 4}$$

↓ Cauchyova věta

$$\Rightarrow \boxed{P g(z) := g(z) \cdot \sqrt{(z+2)(\bar{z}+2)}}$$

<u>Polární rozklad U</u>: pokud má P inverzi, pak je to lehké a $U = TP^{-1}$

↳ protože TT^* má inverzi (ukázali jsme totiž, že $0 \notin \sigma(TT^*)$)

⇒ P ji má taky

↓ <u>V</u> z předpisu

$$\Rightarrow \underbrace{P^{-1} f(z) = \frac{f(z)}{\sqrt{(z+2)(\bar{z}+2)}}}$$

viz.

$$\left[Pg = f \Rightarrow g = \frac{f}{---} \right]$$

$$\Rightarrow T P^{-1} f(z) = \underbrace{(z+2) \frac{f(z)}{\sqrt{(z+2)(\bar{z}+2)}} =: \underline{U f(z)}}$$

+5

<u>VÝSLEDEK</u>:

$$\Rightarrow T = UP, \text{ kde } \overset{\text{izometrie}}{U} f(z) := (z+2) \frac{f(z)}{\sqrt{(z+2)(\bar{z}+2)}}, \quad f \in L^2(D)$$

$$\underset{\text{pozitivní}}{P} f(z) := f(z) \cdot \sqrt{(z+2)(\bar{z}+2)}$$

PÍSEMKA Z FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZY 1-VERZE A

1. Uvažujte operátor $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$ daný maticí
$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   (a) Najděte spektrální poloměr a spektrum $I + T$.
   (b) Najděte $f(I+T)$, kde $f(z) = \sin z$.
2. (a) Spočtěte $x^2 \Delta\delta$ v $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$.
   (b) Ukažte, že $(fu)' = f'u + fu'$, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ a $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$.
   (c) Spočtěte Fourierovu transformaci distribuce $u_f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ dané funkcí $f(x) = e^{-(x-1)^2}$.
3. Nechť $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ a T je dán jako
$$Tf(z) = (z+2)f(z), \quad z \in D.$$
   (a) Uvažujte D s klasickou Lebesgueovou mírou a ukažte, že T je normální operátor na $L^2(D)$.
   (b) Najděte polární rozklad T, tj. najděte operátory $U, P \in \mathcal{L}(L^2(D))$ takové, že U je částečná izometrie, P je pozitivní a $T = UP$.